

Mrav i med

Kraći putevi na pravilnim prizmama i na valjku

Zlatko Sirotić

Sažetak

Mrav sjedi na jednoj bazi pravilne n -prizme, a kapljica meda na suprotnoj, oboje na simetrali svoje baze i na jednakoj udaljenosti od ruba. “Očiti” put — preko jedne baze, uz bočnu stranu, pa preko druge baze — ima duljinu $D = h + b$, neovisno o tome gdje se duž simetrale točke nalaze. Pitamo se kada postoji kraći put, koliko ih je, koliko su dugi i pod kojim kutom mrav treba krenuti.

Problem je riješen u potpunosti za svaki n . Jedan par formula daje duljinu i smjer svakog kandidata na svakoj pravilnoj prizmi, a valjak slijedi kao granica $n \rightarrow \infty$. Usput se pojavljuju tri pojave koje je lako previdjeti dok se prizme obrađuju jedna po jedna: neki putevi postoje tek kad je mrav dovoljno daleko od ruba, neke prizme uopće nemaju kraći put ako nisu dovoljno visoke, a broj kraćih puteva ponaša se posve različito ovisno o tome dopuštaju li se spiralni putevi.

Tri hipoteze iskazane su u Poglavlju 10, a riješene u dodacima. Prva je dokazana; druga se pokazuje netočnom, osim u jednoj kritičnoj vrijednosti; treća je potvrđena, zajedno s asimptotskim zakonom rasta.

Sadržaj

1	Zadatak	3
1.1	Postanak	3
1.2	Postavke i oznake	3
1.3	Dvije točke i očiti put	4
1.4	Metoda: razvoj u ravninu i kotrljanje	4
2	Četverostrana prizma: izvorna zagonetka	4
3	Četverostrana prizma općenito	5
3.1	Postoji li uopće kraći put?	5
3.2	Dva suparnička puta	6
3.3	Koliko se mrav smije udaljiti od ruba?	6
3.4	Najučinkovitiji oblik	6
3.5	Pod kojim kutom mrav treba krenuti?	8
3.6	Rekapitulacija za $2 \leq k \leq 5$	8
4	Trostrana prizma	8
4.1	Četiri klase	8
4.2	Koji je najkraći	9
4.3	Peta klasa	9
4.4	Kutovi	9
4.5	Rekapitulacija za $2 \leq k \leq 5$	11

5 Šesterostrana prizma	11
5.1 Četiri klase	11
5.2 Putevi koji ne postoje za mali p	12
5.3 Kutovi	13
6 Peterostrana prizma	13
6.1 Osam klasa	15
6.2 Kutovi	15
6.3 Pragovi i rasponi	15
6.4 Graf	16
7 Valjak	17
7.1 Granica opće formule	17
7.2 Odakle simetrija	18
7.3 Zatvoreni parametarski oblik	18
7.4 Slučaj $p = 0$	18
7.5 Numeričke vrijednosti	20
8 Jedna formula za svaku prizmu	20
8.1 Komponente	20
8.2 Kutovi	21
8.3 Izvedivost	21
8.4 Pragovi u p	22
8.5 Neparne i parne prizme	22
9 Kada uopće nema kraćeg puta?	23
9.1 Neparne prizme	23
9.2 Parne prizme	23
9.3 Pragovi u p : koje su prizme pogođene	24
10 Tri hipoteze	25
A Dokaz hipoteze H1	26
A.1 Kriterij p -neovisnosti	26
A.2 Duljina p -neovisnog puta	26
A.3 Parne prizme	27
A.4 Neparne prizme: egzistencija	27
A.5 Klasifikacija svih p -neovisnih puteva	28
A.6 Koje su klase kraće od D	29
A.7 Jedinственost	29
A.8 Glavni rezultat	31
B H2: opovrgnuta, osim u jednoj točki	31
B.1 Numerička slika	31
B.2 Zašto saturira	32
B.3 Zašto je $k = 1$ drukčiji	32
B.4 Zaključak	32
C H3: potvrđena, uz zakon rasta	33
C.1 Struktura	33
C.2 Koliko ih je kraće od očitog puta	33
C.3 Izvedivost kad $k \rightarrow \infty$	33
C.4 Zakon rasta	34

C.5 Mjerenja	34
C.6 Zaključak	34

1 Zadatak

1.1 Postanak

Godine 1981. prijatelj Korado Korlević postavio mi je sljedeću zagonetku. Kvadar ima dimenzije $4 \times 4 \times 10$. Mrav sjedi na jednoj strani 4×4 , po vodoravnoj sredini i 1 jedinicu od gornjeg ruba; kapljica meda je na suprotnoj strani, po vodoravnoj sredini i 1 jedinicu od donjeg ruba. Mrav hoda samo po površini. Očiti put — ravno do ruba, uz kvadar, pa ravno do meda — ima duljinu $4 + 10 = 14$. Postoji li išta kraće?

Postoji, i nađe se za par sati s listom papira. Dulje je trajalo pitanje koje je uslijedilo: *što ako bi bio valjak?* To je odolijevalo, i riješeno je tek 2013. godine. Kad sam se poslije vratio prizmi, pokazalo se da jednostavniji zadatak krije više nego što izvorna zagonetka sugerira — nekoliko različitih kraćih puteva umjesto jednoga, njihov broj ovisi o obliku prizme na način koji nije nimalo očit, a između prizmi s parnim i neparnim brojem stranica postoji oštra razlika.

Ovaj tekst skuplja ono što je do sada poznato. Prizme se obrađuju redom kojim su izvorno proučavane — četverostrana, trostrana, šesterostrana, peterostrana — a zatim valjak. Poglavlje 8 daje opću formulu koja ih sve pokriva odjednom, i koja pojedinačne slučajeve naknadno čini korolarima, a ne zasebnim računima.

1.2 Postavke i oznake

Tijelo je posvuda *pravilna n -prizma*: dva sukladna pravilna n -terokuta spojena s n pravokutnih bočnih strana.

Definicija 1.1 (Parametri). Za pravilni n -terokut stranice s pišemo

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{\pi}{n} \text{ (apotema, polumjer upisane kružnice),} \quad R = \frac{s}{2 \sin(\pi/n)} \text{ (polumjer opisane kružnice),}$$

pa vrijedi $r = R \cos(\pi/n)$. *Visina baze b* je duljina simetrale baze, tj. dužine koja spaja dvije suprotne rubne točke kroz središte:

$$b = \begin{cases} r + R = \frac{s}{2} \cot \frac{\pi}{2n}, & n \text{ neparan (vrh do polovišta suprotne stranice),} \\ 2r = s \cot \frac{\pi}{n}, & n \text{ paran (polovište do polovišta suprotne stranice).} \end{cases}$$

Visinu prizme pišemo $h = kb$, pa je k visina mjerena u jedinicama visine baze. Konačno, $\beta = 2\pi/n$.

Razlika između parnog i neparnog n u Definiciji 1.1 nije knjigovodstvena smetnja. Pokazat će se da je ona jedini izvor svake razlike između parnih i neparnih prizmi u ovom zadatku, pa joj vrijedi dati ime.

Definicija 1.2 (Parametar asimetrije). Stavimo $c := b - r$ i

$$\varepsilon := c - r = b - 2r = \begin{cases} R - r = \frac{s}{2} \tan \frac{\pi}{2n} > 0, & n \text{ neparan,} \\ 0, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

Za neparni n dva su kraja simetrale različite vrste — jedan je vrh, na udaljenosti R od središta, drugi polovište stranice, na udaljenosti r — a ε mjeri tu razliku. Za parni n oba su kraja polovišta stranica i ε iščezava. Teorem 8.6 i Teorem 8.7 pokazat će da sve ovisi o tome.

1.3 Dvije točke i očiti put

Definicija 1.3 (Mrav i med). Neka je $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Mrav je u točki A donje baze koja leži na simetrali te baze, na udaljenosti $b(1-p)$ od jednog kraja simetrale; jednako tako, na udaljenosti bp od drugog kraja. Med je u točki B gornje baze, na simetrali te baze, na udaljenosti bp od onog kraja simetrale koji leži okomito iznad mravljem kraju najbližeg kraja.

Riječima: obje točke leže na simetrali, obje na istom relativnom položaju, jedna mjerena od bližeg ruba a druga od daljeg, tako da je raspored simetričan na okretanje prizme naopako. Vrijednost $p = 0$ stavlja mrava na sam rub; $p = \frac{1}{2}$ na polovište simetrale.

Napomena 1.4 (Očiti put). *Očiti put* ide od A po simetrali donje baze do ruba (duljina $b(1-p)$), zatim okomito uz bočnu stranu (duljina h), pa po simetrali gornje baze do B (duljina bp). Ukupna duljina je

$$D = b(1-p) + h + bp = b + h = b(k+1),$$

što ne ovisi o p . Svako pitanje koje slijedi glasi: pobjeđuje li neki put D ?

1.4 Metoda: razvoj u ravninu i kotrljanje

Svi računi koriste isti postupak. Razrežimo plašt po jednom okomitom bridu i razvijmo ga u ravninu: postaje vodoravna traka

$$\Pi = \{(x, y) : Y_d \leq y \leq Y_g\}, \quad Y_d = b, \quad Y_g = b + h,$$

koju smijemo neograničeno produljiti lijevo i desno, po jedna kopija trake za svaki obilazak prizme. Baze se zatim pridruže traci, svaka duž jedne stranice. Kako put može napustiti donju bazu kroz bilo koju od njezinih n stranica i ući u gornju bazu kroz bilo koju od njezinih n stranica, sve mogućnosti prikazujemo *kotrljanjem* baza duž trake: D_i označava donju bazu nakon i koraka kotrljanja udesno, G_j gornju bazu nakon j koraka. Put od A do B koji prelazi donju bazu, plašt i gornju bazu postaje u toj slici ravna dužina od A_i do B_j — pod uvjetom da ostane unutar područja koje stvarno zauzima materijal.

Taj je uvjet cijela poteškoća, a Poglavlje 8 ga iskazuje točno. Dvije činjenice o kotrljanju koristit će se stalno pa ih bilježimo ovdje.

Lema 1.5 (Kotrljanje). *Nakon i koraka dodirna stranica poligona D_i zauzima interval $[is, (i+1)s]$ na pravcu $y = Y_d$; središte poligona D_i je u $((i + \frac{1}{2})s, Y_d - r)$; a preslikavanje koje D_0 nosi u D_i je direktna izometrija s kutom rotacije $i\beta$. Odgovarajuće tvrdnje vrijede za G_j , s dodirnom stranicom $[js, (j+1)s]$ na $y = Y_g$, središtem $((j + \frac{1}{2})s, Y_g + r)$ i kutom rotacije $-j\beta$.*

Dokaz. Indukcijom po i . Svaki je korak rotacija za vanjski kut β oko desnog kraja trenutne dodirne stranice; ona spušta sljedeću stranicu na susjedni interval duljine s , a konveksni poligon ostaje u poluravnini $y \leq Y_d$. Središte pravilnog poligona je na udaljenosti r od svake stranice, a njegova ortogonalna projekcija na stranicu je polovište te stranice, što daje navedeni položaj. Kompozicija i rotacija za kut β je direktna izometrija s kutom rotacije $i\beta$. $\square$

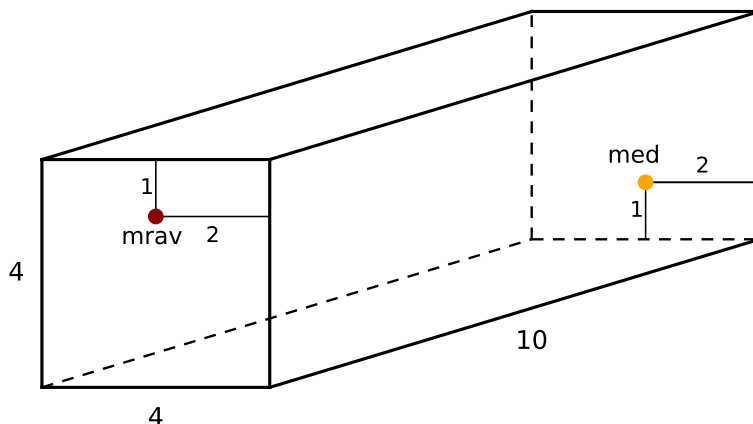
Posvuda *klasa* kraćih puteva znači skup puteva jednake duljine. Putevi dolaze u zrcalnim parovima — mrav može krenuti lijevo ili desno — i dva člana para uvijek imaju istu duljinu, pa klasa obično sadrži dva puta. Kad kažemo da prizma “ima četiri kraća puta”, mislimo na četiri klase.

2 Četverostrana prizma: izvorna zagonetka

Uzmimo $n = 4$ sa stranicom $s = 4$ i visinom $h = 10$. Za $n = 4$ visina baze jednaka je stranici, $b = s \cot(\pi/4) = s = 4$, pa očiti put ima duljinu

$$D = h + b = 10 + 4 = 14.$$

Mrav je 1 jedinicu od gornjeg ruba svoje strane, med 1 jedinicu od donjeg ruba suprotne strane, oboje po vodoravnoj sredini — dakle $p = \frac{1}{4}$ u oznakama Definicije 1.3. Vidi Sliku 1.



Slika 1: Izvorna zagonetka: kvadar $4 \times 4 \times 10$. Očiti put ima duljinu $4 + 10 = 14$.

Razvijmo u ravninu. Položimo četiri bočne strane kao traku širine $4s = 16$ i visine 10, pa pridružimo obje baze. Sada kotrljamo: zakrenimo gornji kvadrat za 90° oko ruba, tako da dosjedne jedan panel dalje duž trake. Med putuje s njim. Ravna dužina od mrava do zakotrljanog meda ima vodoravni raspon 5 i okomiti 13, pa je

$$d = \sqrt{(10 + 3)^2 + 5^2} = \sqrt{194} = 13,9284 \dots < 14 = \sqrt{196}.$$

Očiti put dakle nije optimalan: mrav uštedi oko 0,07 krenuvši ukoso.

Dvije primjedbe vrijedi iznijeti odmah, jer obje prerastaju u opće pojave.

Prvo, kraći put nije jedinstven. Svejedno je okrene li mrav lijevo ili desno, i svejedno je kotrlja li se gornji kvadrat u smjeru kazaljke ili suprotno; sve četiri kombinacije daju dužine iste duljine $\sqrt{194}$. U jeziku Poglavlja 1 to je jedna *klasa* koja sadrži četiri puta — dva zrcalna para.

Drugo, gornji račun još nije dokaz da je $\sqrt{194}$ minimum. On pokazuje samo da jedan određeni razvoj pobjeđuje očiti put. Potpun argument mora prebrojiti razvoje i, što je ključno, provjeriti da svaka dužina-kandidat stvarno leži na površini prizme. Upravo u toj provjeri živi većina suptilnosti općeg zadatka; točno je iskazana u Poglavlju 8.

Za ovaj konkretan slučaj odgovor je da $\sqrt{194}$ jest minimum, a nije teško vidjeti da kraći put ne može prolaziti kroz vrh prizme.

3 Četverostrana prizma općenito

Sada puštamo da se s , h i p mijenjaju. Kako je $b = s$ za $n = 4$, očiti put ima duljinu

$$D = s + h = s(k + 1), \quad k = h/s.$$

3.1 Postoji li uopće kraći put?

Krenimo s mravom na rubu, $p = 0$. Označimo s d_0 duljinu najboljeg kosog puta u tom položaju. Dobije se zakretanjem jednog kvadrata za 180° umjesto za 90° , čime se dvije točke razmaknu za $2s$ vodoravno i h okomito:

$$d_0^2 = h^2 + (2s)^2 = h^2 + 4s^2.$$

To pobjeđuje očiti put točno kada je $d_0^2 < D^2 = h^2 + 2sh + s^2$, tj. kada je $4s^2 < 2sh + s^2$, odnosno

$$h > \frac{3}{2}s, \quad \text{ekvivalentno} \quad k > \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Četverostrana prizma mora dakle biti barem jedan i pol put viša nego što je široka prije nego što je ikakva ušteda moguća. To je stvarno ograničenje, i svojstveno je malim prizmama: Poglavlje 9 pokazuje da odgovarajući prag pada s n i da za neparni n posve nestaje.

3.2 Dva suparnička puta

Za $0 < p \leq \frac{1}{2}$ postoje dvije klase kandidata, dobivene zakretanjem za 90° odnosno za 180° . U oznakama indeksa iz Poglavlja 8 to su parovi $(i, j) = (2, 1)$ i $(2, 0)$. Njihove su duljine

$$d_1 = s\sqrt{k^2 + k + 2kp + 2p^2 - 2p + \frac{5}{2}}, \quad (2)$$

$$d_2 = s\sqrt{k^2 + 4kp + 4p^2 + 4}. \quad (3)$$

Formula (2) dolazi iz vodoravne i okomite komponente $(\frac{s}{2} + s(1-p))$ i $(sp + sk + \frac{s}{2})$; formula (3) iz $(\frac{s}{2} + s + \frac{s}{2})$ i $(sp + sk + sp)$.

Koji je od njih kraći ovisi o p . Izjednačavanjem $d_1 = d_2$ dobivamo

$$2p^2 + 2(k+1)p + \frac{3}{2} - k = 0, \quad p_{eq} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 + 4k - 2} - k - 1 \right), \quad (4)$$

ili, riješeno u drugom smjeru, $k_{eq} = \frac{p^2 + p + 3/4}{1/2 - p}$. Za $p \leq p_{eq}$ kraći je put d_2 , za $p \geq p_{eq}$ put d_1 .

Uz $k = 3,5$ ispada $p_{eq} = 0,2122 \dots$

Napomena 3.1. Za $2 \leq k \leq 5$ to su jedine dvije klase. Za veće k pojavljuju se daljnje klase; pri $k = 10$, na primjer, postoji i treća. Poglavlje 8 objašnjava odakle dolaze, a Dodatak C pokazuje da njihov broj raste neograničeno kad $k \rightarrow \infty$, ako su dopušteni spiralni putevi.

3.3 Koliko se mrav smije udaljiti od ruba?

Svaka klasa pobjeđuje očiti put samo za p ispod nekog praga. Iz $d_1 \leq D$ u (2) slijedi $2p^2 + 2(k-1)p + \frac{3}{2} - k \leq 0$ pa

$$p_{max1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 - 2} - k + 1 \right), \quad (5)$$

dok $d_2 \leq D$ daje $2p^2 + 2kp + \frac{3}{2} - k \leq 0$ i

$$p_{max2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 + 2k - 3} - k \right). \quad (6)$$

Za $k = 3,5$: $p_{max1} = 0,3507 \dots$ i $p_{max2} = 0,2655 \dots$. Primijetimo da nakon p_{eq} klasa d_2 više nije najkraća, ali ostaje kraća od očitog puta sve do p_{max2} .

3.4 Najučinkovitiji oblik

Prirodno je pitati koji k daje najveću relativnu uštedu, tj. minimizira d/D . Za granu d_1 je

$$\frac{d_1}{D} = \frac{\sqrt{k^2 + k + 2kp + 2p^2 - 2p + 5/2}}{k+1},$$

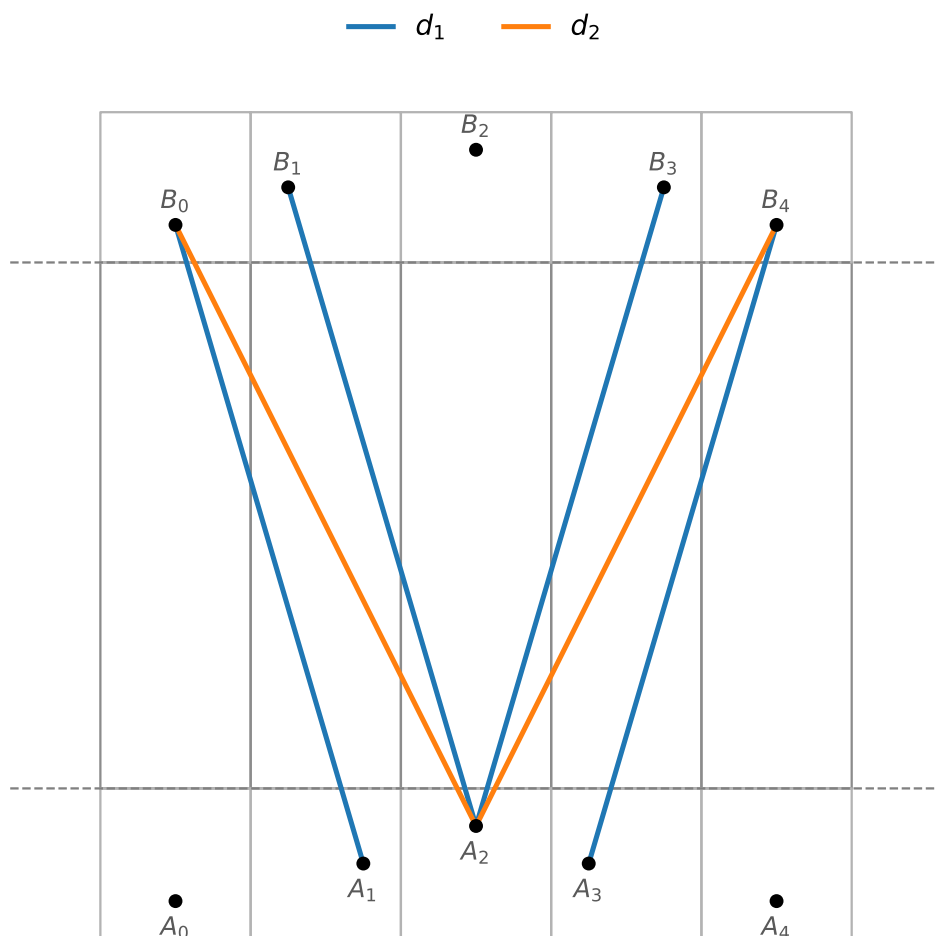
a deriviranje po k i izjednačavanje brojnika s nulom daje $(2p-1)k + 4p^2 - 6p + 4 = 0$, dakle

$$k_{opt1} = \frac{2p^2 - 3p + 2}{1/2 - p}, \quad \text{i slično} \quad k_{opt2} = \frac{2p^2 - p + 2}{1/2 - p}. \quad (7)$$

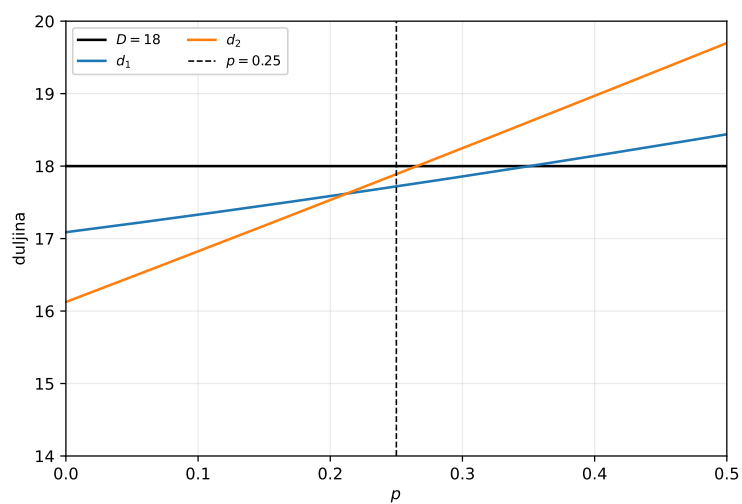
Izjednačavanje k_{eq} s k_{opt1} daje prijelaz

$$p_{opt} = 2 - \frac{\sqrt{11}}{2} = 0,3416 \dots,$$

ispod kojeg vrijedi k_{opt2} , a iznad k_{opt1} . (Izjednačavanje k_{eq} s k_{opt2} nema realno rješenje.)



Slika 2: Razvoj četverostrane prizme, $b = s = 4$, $k = 3,5$, $p = 0,25$: plašt kao traka, obje baze zakotrljane u sve položaje, a dvije klase kraćih puteva u boji.



Slika 3: Dvije duljine na četverostranoj prizmi kao funkcije od p , naspram očitog puta $D = 18$ ($b = 4$, $k = 3,5$).

3.5 Pod kojim kutom mrav treba krenuti?

Mjereno od horizontale u vlastitoj bazi mrava — konvencija je precizirana u Poglavlju 8 — dvije klase traže

$$\theta_1 = \arctan \frac{2k + 2p + 1}{3 - 2p}, \quad \theta_2 = \arctan \frac{k + 2p}{2}. \quad (8)$$

Uz $k = 3,5$, $p = 0,25$ to daje $73,61^\circ$ i $63,43^\circ$.

3.6 Rekapitulacija za $2 \leq k \leq 5$

$D = s(k + 1)$	$k > 3/2$ nužno za postojanje kraćeg puta
$d_1 = s\sqrt{k^2 + k + 2kp + 2p^2 - 2p + 5/2}$	vrijedi za $p \geq p_{eq}$
$d_2 = s\sqrt{k^2 + 4kp + 4p^2 + 4}$	vrijedi za $p \leq p_{eq}$
$p_{eq} = \frac{1}{2}(\sqrt{k^2 + 4k - 2} - k - 1)$	prijelaz
$p_{max1} = \frac{1}{2}(\sqrt{k^2 - 2} - k + 1)$	
$p_{max2} = \frac{1}{2}(\sqrt{k^2 + 2k - 3} - k)$	
$k_{opt1} = (2p^2 - 3p + 2)/(1/2 - p)$	za $p \geq p_{opt}$
$k_{opt2} = (2p^2 - p + 2)/(1/2 - p)$	za $p \leq p_{opt}$
$p_{opt} = 2 - \sqrt{11}/2$	
$\theta_1 = \arctan \frac{2k+2p+1}{3-2p}, \quad \theta_2 = \arctan \frac{k+2p}{2}$	

Napomena 3.2. Jedno svojstvo četverostrane prizme vrijedi istaknuti već sada, jer je iznimno. Obje klase postoje, kao putevi na površini, za svaki $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Kod većine drugih prizmi to ne vrijedi: neki putevi jednostavno ne leže na površini kad je mrav preblizu rubu, i nastaju tek iznad nekog praga u p . Vidi Poglavlje 5 za prvi primjer i Poglavlje 9 za opću sliku. Kako je četverostrana prizma bila polazište, tu je pojavu lako previdjeti.

4 Trostrana prizma

Za $n = 3$ baza je jednakostraničan trokut, a njezina simetrala ide od vrha do polovišta suprotne stranice, pa je

$$b = v = \frac{s\sqrt{3}}{2}, \quad D = h + b = b(k + 1).$$

(Za neparni n općenito je $b = \frac{s}{2} \cot \frac{\pi}{2n}$.)

4.1 Četiri klase

Pri $k = 3,5$ i $p = 0,25$ trostrana prizma ima četiri klase kraćih puteva, s parovima indeksa $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 0)$ i $(1, 3)$. Njihove su duljine

$$d_1 = b\sqrt{k^2 + k + 3p^2 - 3p + 1}, \quad (9)$$

$$d_2 = b\sqrt{k^2 + k + 1}, \quad (10)$$

$$d_3 = b\sqrt{k^2 + 3kp + 3p^2 - 3p + 3}, \quad (11)$$

$$d_4 = b\sqrt{k^2 + 3kp + 3p^2 + 3p + 3}. \quad (12)$$

Dvije stvari upadaju u oči.

Napomena 4.1 (Put kojem je svejedno gdje mrav stoji). Duljina d_2 uopće ne sadrži p . Sjedi li mrav na rubu ili u polovištu simetrale, taj put ima istu duljinu $b\sqrt{k^2 + k + 1}$. To je prvi primjer onoga što Poglavlje 10 naziva *p-neovisnim* putem, a Dodatak A pokazuje da svaka neparna prizma ima točno jedan takav put kraći od D , duljine $b\sqrt{k^2 + 2k \cos(\pi/n) + 1}$; za $n = 3$ je $2 \cos(\pi/3) = 1$.

Napomena 4.2 (Bez praga po visini). I d_1 i d_2 kraći su od D za *svaki* $k > 0$ i svaki p . Doista,

$$d_2^2 - D^2 = b^2(k^2 + k + 1 - (k+1)^2) = -b^2k < 0.$$

Trostranoj prizmi dakle nikad nije potrebna visina da bi se pojavila ušteda — za oštru razliku od četverostrane, koja traži $k > 3/2$. Poglavlje 9 objašnjava razlog.

Druge dvije klase ipak nose prag u k :

$$d_3 < D \iff k > \frac{3p^2 - 3p + 2}{2 - 3p}, \quad d_4 < D \iff k > \frac{3p^2 + 3p + 2}{2 - 3p},$$

uz

$$p_{max3} = \frac{1}{6} \left(\sqrt{9k^2 + 6k - 15} - 3k + 3 \right), \quad p_{max4} = \frac{1}{6} \left(\sqrt{9k^2 + 42k - 15} - 3k - 3 \right).$$

4.2 Koji je najkraći

Poredak $d_1, \dots, d_4$ mijenja se s p i k . Prijelazi su

$$\begin{aligned} p_{eq,1-3} &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{k} \right) \quad (\text{traži } k > 2), & \text{ekvivalentno } k_{eq,1-3} &= \frac{2}{1 - 3p}, \\ p_{eq,1-4} &= \frac{k - 2}{3k + 6}, & p_{eq,2-3} &= \frac{1}{6} \left(\sqrt{9k^2 - 6k - 15} - 3k + 3 \right), \\ p_{eq,2-4} &= \frac{1}{6} \left(\sqrt{9k^2 + 30k - 15} - 3k - 3 \right). \end{aligned}$$

Ako je $k > 2$ i $p < \frac{1}{3}(1 - 2/k)$, kraći je d_3 od d_1 ; inače je d_1 kraći. Za d_1 i d_2 : jednaki su pri $p = 0$, a $d_1 < d_2$ za sve $p > 0$. Za d_3 i d_4 : jednaki su pri $p = 0$, a $d_3 < d_4$ za sve $p > 0$.

4.3 Peta klasa

Gornji je popis potpun samo za umjerene p . Peta klasa, s parom indeksa $(0, 1)$, ima duljinu

$$d_5 = b\sqrt{k^2 + 3k(1 - p) + 3p^2 - 3p + 3}, \quad (13)$$

a usporedba s (11) otkriva lijep odnos

$$d_5(p) = d_3(1 - p).$$

Taj put uvijek leži na površini, ali je kraći od očitog puta samo za

$$p \geq p_{min5} = \frac{k+1}{2} - \frac{\sqrt{9k^2 + 6k - 15}}{6} = 1 - p_{max3},$$

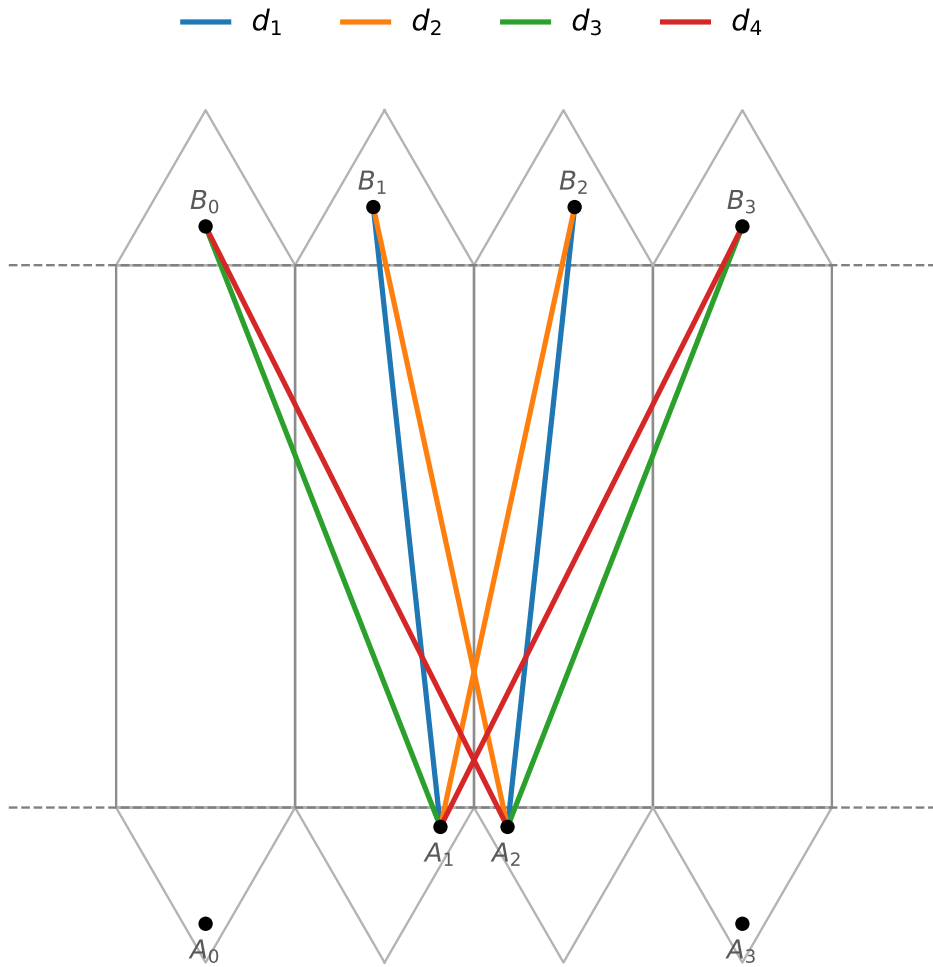
što za $k = 3,5$ daje $p_{min5} = 0,45301\dots$. Dakle za $k = 3,5$ trostrana prizma ima četiri klase kraćih puteva kad je $p < 0,453$ i, u uskom pojasu iznad toga, petu. (Pri $p = \frac{1}{2}$ klase $(0, 1)$ i $(1, 0)$ podudaraju se u duljini, kako i moraju po simetriji.)

4.4 Kutovi

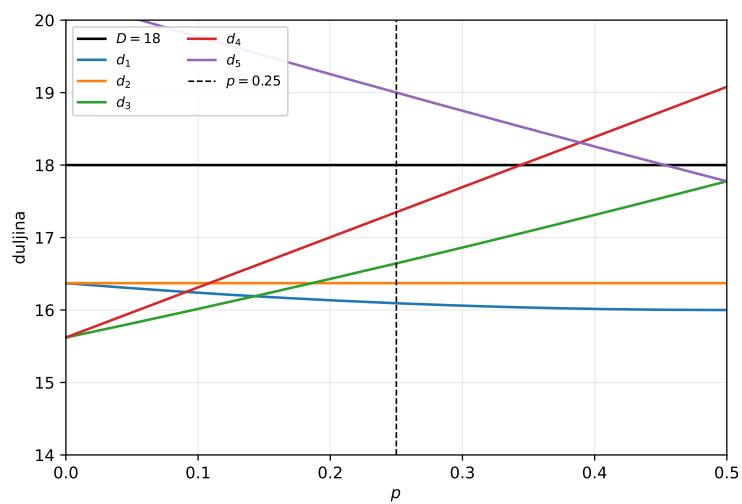
Uz konvenciju iz Poglavlja 8,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2k+1}{1-2p}\right) - \frac{\pi}{3}, & \theta_2 &= \frac{2\pi}{3} - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2k+1)\right), \\ \theta_3 &= \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2k+3p}{2-p}\right) - \frac{\pi}{3}, & \theta_4 &= \frac{2\pi}{3} - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{6k+9p}{6+3p}\right). \end{aligned}$$

Pri $k = 3,5$, $p = 0,25$ to je redom $23,82^\circ$, $42,22^\circ$, $8,64^\circ$ i $56,70^\circ$.



Slika 4: Razvoj trostrane prizme, $b = 4$, $k = 3,5$, $p = 0,25$: četiri klase kraćih puteva.



Slika 5: Duljine na trostranoj prizmi u ovisnosti o p ($b = 4$, $k = 3,5$). Krivulja d_2 je vodoravna jer ne ovisi o p ; peta klasa d_5 iz Odjeljka 4.3 spušta se i siječe D na $p = 0,453$.

4.5 Rekapitulacija za $2 \leq k \leq 5$

$D = b(k+1), \quad b = s\sqrt{3}/2$	bez praga po visini: $d_1, d_2 < D$ za sve $k > 0$
$d_1 = b\sqrt{k^2 + k + 3p^2 - 3p + 1}$	
$d_2 = b\sqrt{k^2 + k + 1}$	ne ovisi o p
$d_3 = b\sqrt{k^2 + 3kp + 3p^2 - 3p + 3}$	$p \leq p_{max3}$
$d_4 = b\sqrt{k^2 + 3kp + 3p^2 + 3p + 3}$	$p \leq p_{max4}$
$d_5 = b\sqrt{k^2 + 3k(1-p) + 3p^2 - 3p + 3}$	$p \geq 1 - p_{max3}$
$p_{max3} = \frac{1}{6}(\sqrt{9k^2 + 6k - 15} - 3k + 3)$	
$p_{max4} = \frac{1}{6}(\sqrt{9k^2 + 42k - 15} - 3k - 3)$	

5 Šesterostrana prizma

Za $n = 6$ simetrala spaja polovišta dviju suprotnih stranica, pa je uz $v = s\sqrt{3}/2$, visinu jednog od šest jednakokraničnih trokuta,

$$b = 2v = s\sqrt{3} = s \cot \frac{\pi}{6}, \quad D = h + b = b(k+1).$$

(Za parni n općenito je $b = s \cot(\pi/n)$.)

5.1 Četiri klase

Pri $k = 3, 5$, $p = 0, 25$ postoje četiri klase, s parovima indeksa $(3, 1)$, $(3, 0)$, $(2, 1)$ i $(3, 2)$:

$$d_1 = b\sqrt{k^2 + \frac{1}{2}k + 3kp + 3p^2 - 2p + \frac{31}{12}}, \quad (14)$$

$$d_2 = b\sqrt{k^2 + 4kp + 4p^2 + 3}, \quad (15)$$

$$d_3 = b\sqrt{k^2 + k + 2kp + 4p^2 - 4p + \frac{7}{3}}, \quad (16)$$

$$d_4 = b\sqrt{k^2 + \frac{3}{2}k + kp + p^2 - p + \frac{19}{12}}. \quad (17)$$

Svaka je kraća od očitog puta samo iznad praga u k :

$$d_1 < D \iff k > \frac{2p^2 - \frac{4}{3}p + \frac{19}{18}}{1 - 2p}, \quad d_2 < D \iff k > \frac{2p^2 + 1}{1 - 2p},$$

$$d_3 < D \iff k > \frac{4}{3} \cdot \frac{3p^2 - 3p + 1}{1 - 2p}, \quad d_4 < D \iff k > \frac{2p^2 - 2p + \frac{7}{6}}{1 - 2p},$$

uz pripadne gornje granice u p

$$p_{max1} = \frac{1}{6}(\sqrt{9k^2 + 6k - 15} - 3k + 2), \quad p_{max2} = \frac{1}{2}(\sqrt{k^2 + 2k - 2} - k),$$

$$p_{max3} = \frac{1}{12}(\sqrt{9k^2 - 12} - 3k + 6), \quad p_{max4} = \frac{1}{6}(\sqrt{9k^2 - 12} - 3k + 3).$$

Vrijednosti prijelaza su

$$p_{eq,1-2} = \frac{1}{6}(\sqrt{9k^2 + 54k + 21} - 3k - 6), \quad p_{eq,1-3} = \frac{1}{2}(-\sqrt{k^2 + 2k + 5} + k + 2),$$

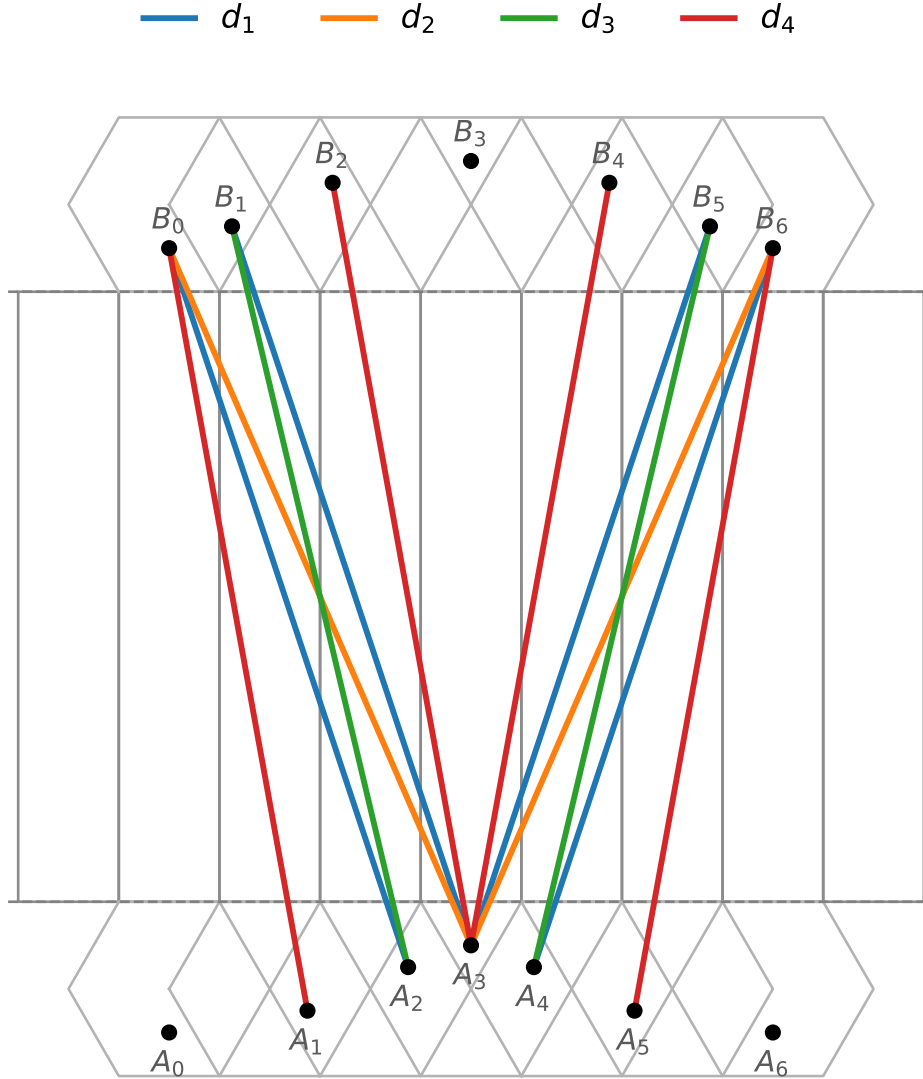
$$p_{eq,1-4} = \frac{1}{4}(\sqrt{4k^2 + 4k - 7} - 2k + 1), \quad p_{eq,2-3} = \frac{3k - 2}{6k + 12},$$

$$p_{eq,2-4} = \frac{1}{6}(\sqrt{9k^2 + 24k - 16} - 3k - 1), \quad p_{eq,3-4} = \frac{1}{2} - \frac{k}{3} \quad (k < \frac{3}{2}), \text{ inače } \frac{1}{2}.$$

Napomena 5.1. Za razliku od trostrane, šesterostrana prizma nema p -neovisan put kraći od D . To nije slučajnost formula: Teorem 8.6 pokazuje da ga nema nijedna parna prizma. Razlog je parametar asimetrije ε iz Definicije 1.2, koji iščezava točno kad je n paran.

5.2 Putevi koji ne postoje za mali p

Ovdje šesterostrana prizma pokazuje nešto što četverostrana i trostrana ne pokazuju. Dvije od četiri klase nisu tek dulje od D za mali p — one *uopće ne postoje*. Ravna dužina u razvijenoj slici napušta bazu kroz pogrešnu stranicu, pa ne odgovara nikakvom putu po površini prizme.



Slika 6: Razvoj šesterostrane prizme, $b = 4$, $k = 3,5$, $p = 0,25$: četiri klase kraćih puteva.

Zapišemo li egzaktni kriterij izvedivosti iz Poglavlja 8 kao uvjet na p , dobivamo za svaku klasu kvadratnu nejednadžbu. Njezinim rješavanjem:

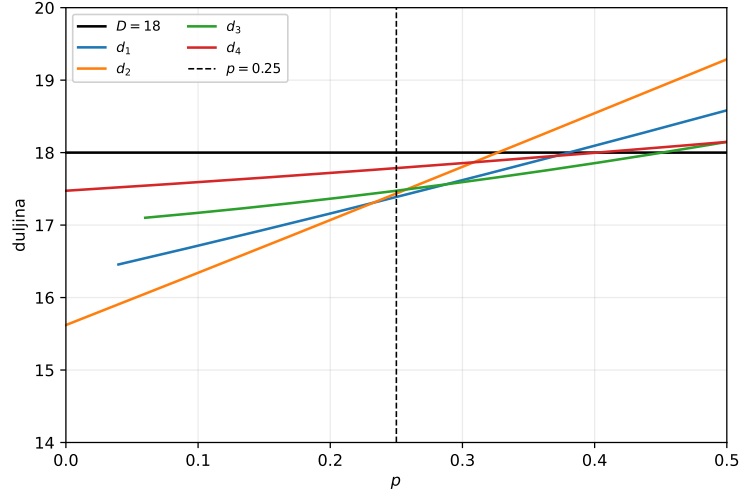
$$d_3 = (2, 1) : \quad p \geq p_{min3} = \frac{k-2}{2(3k+2)}, \quad \text{prag tek za } k > 2, \quad (18)$$

$$d_1 = (3, 1) : \quad p \geq p_{min1} = \frac{\sqrt{9k^2 + 18k - 11}}{6} - \frac{k}{2} - \frac{1}{3}, \quad \text{tek za } k > \frac{5}{2}. \quad (19)$$

Klase d_2 i d_4 postoje za svaki p .

Za $k = 3,5$ to daje

$$p_{min1} = \frac{\sqrt{649} - 25}{12} = 0,0396232 \dots, \quad p_{min3} = \frac{3}{50} = 0,06 \text{ točno},$$



Slika 7: Duljine na šesterostranoj prizmi u ovisnosti o p ($b = 4$, $k = 3,5$). Krivulje d_1 i d_3 počinju tek na $p = 0,0396$ i $p = 0,06$; ispod tih vrijednosti pripadni putevi uopće ne leže na površini (Odjeljak 5.2).

pri čemu su pripadne kvadratne jednadžbe $6p^2 + 25p - 1 = 0$ odnosno $50p - 3 = 0$.

Napomena 5.2 (Zašto je jedna linearna, a druga nije). Vodeći koeficijent obiju kvadratnih jednadžbi izvedivosti jednak je $-\sin((i+j)\beta)$ (Propozicija 8.5). Za d_3 je $i+j = 3$ i $6 \mid 2 \cdot 3$, pa koeficijent iščezava i uvjet je linearan, što daje racionalan prag. Za d_1 je $i+j = 4$, uvjet je uistinu kvadratan, pa se pojavljuje korijen.

Napomena 5.3 (Što prag znači). Geometrijski, mrav je blizu ruba daleko od središta svoje baze; ravna crta prema medu tada iz baze izlazi kroz susjednu, a ne kroz namijenjenu stranicu. Kako p raste, mrav se pomiče prema središtu, crta se uspravlja u odnosu na bazu, i pri $p = p_{min}$ izlazna točka ulazi u ispravnu stranicu. Ista slika objašnjava zašto pragovi rastu s k : viša prizma znači crtu koja je položena u odnosu na bazu.

5.3 Kutovi

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan \frac{\sqrt{3}(4k+6p+1)}{11-6p}, & \theta_2 &= \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(k+2p) \right), \\ \theta_3 &= \arctan \frac{\sqrt{3}(2k+2p+1)}{5-6p} - \frac{\pi}{3}, & \theta_4 &= \arctan \frac{\sqrt{3}(4k+2p+3)}{7-6p}. \end{aligned}$$

Pri $k = 3,5$, $p = 0,25$: $71,61^\circ$, $66,59^\circ$, $16,63^\circ$, $79,71^\circ$.

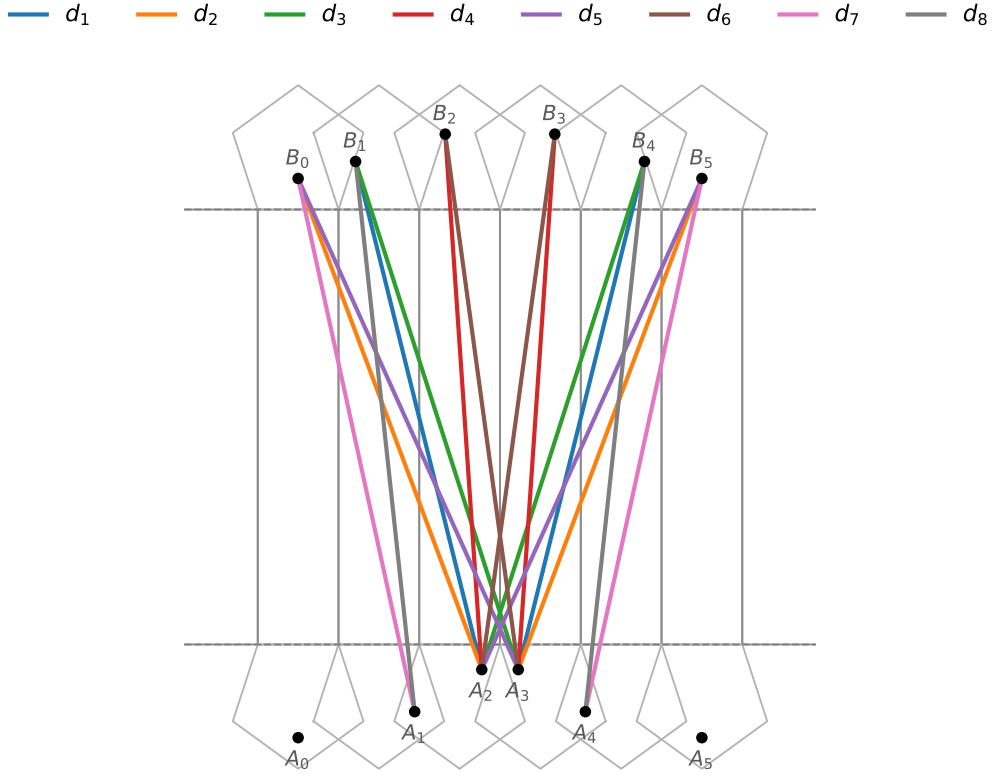
6 Peterostrana prizma

Za $n = 5$ simetrala spaja vrh s polovištem suprotne stranice, i

$$b = \frac{s}{2} \cot \frac{\pi}{10} = v + t, \quad D = h + b = b(k+1),$$

gdje su v i t visina i krak jednog od pet trokuta koji čine peterokut.

Peterostrana je prizma najbogatija među malim slučajevima: pri $k = 3,5$, $p = 0,25$ ima *osam* klasa kraćih puteva, dvostruko više nego trostrana ili šesterostrana. Sve su navedene ovdje.



Slika 8: Razvoj peterostrane prizme, $b = 4$, $k = 3,5$, $p = 0,25$: svih osam klasa, s bazama zakotrljanima u sve položaje.

klasa	(i, j)	zrcalna	d pri $b = 4$, $k = 3,5$, $p = 0,25$	θ
d_1	(2, 1)	(3, 4)	16,850887	$40,053^\circ$
d_2	(2, 0)	(3, 5)	16,877805	$33,500^\circ$
d_3	(2, 4)	(3, 1)	17,172173	$71,757^\circ$
d_4	(2, 2)	(3, 3)	17,276111	$50,098^\circ$
d_5	(2, 5)	(3, 0)	17,324519	$78,144^\circ$
d_6	(2, 3)	(3, 2)	17,395686	$61,768^\circ$
d_7	(1, 0)	(4, 5)	17,568277	$-30,329^\circ$
d_8	(1, 1)	(4, 4)	17,810068	$-24,131^\circ$

Tablica 1: Osam klasa na peterostranoj prizmi.

6.1 Osam klasa

Poredane po duljini pri $k = 3,5$, $p = 0,25$, klase imaju parove indeksa navedene u Tablici 1. Svaka ima zrcalnu blizanku $(5 - i, 5 - j)$ iste duljine.

Pišemo li $d_t = b\sqrt{Q_t}$, osam formula za duljinu glasi

$$Q_1 = k^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}k + \sqrt{5}kp + \frac{5+\sqrt{5}}{2}p^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}p + (11 - 4\sqrt{5}), \quad (20)$$

$$Q_2 = k^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{2}kp + \frac{5+\sqrt{5}}{2}p^2 + \frac{5\sqrt{5}-15}{2}p + (25 - 10\sqrt{5}), \quad (21)$$

$$Q_3 = k^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}k + \sqrt{5}kp + \frac{5-\sqrt{5}}{2}p^2 + \frac{15-7\sqrt{5}}{2}p + (11 - 4\sqrt{5}), \quad (22)$$

$$Q_4 = k^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}k + \frac{5-\sqrt{5}}{2}p^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}p + 1, \quad (23)$$

$$Q_5 = k^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{2}kp + \frac{5+\sqrt{5}}{2}p^2 + \frac{15-5\sqrt{5}}{2}p + (25 - 10\sqrt{5}), \quad (24)$$

$$Q_6 = k^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}k + 1, \quad (25)$$

$$Q_7 = k^2 + (\sqrt{5} - 1)k + \frac{5-\sqrt{5}}{2}kp + \frac{5-\sqrt{5}}{2}p^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}p + (4 - \sqrt{5}), \quad (26)$$

$$Q_8 = k^2 + \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}k + \frac{5+\sqrt{5}}{2}p^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}p + (4 - \sqrt{5}). \quad (27)$$

Primijetimo (25): klasa d_6 ne nosi p . To je p -neovisni put iz Dodatka A, i doista je $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos(\pi/5)$, pa je $d_6 = b\sqrt{k^2 + 2k\cos(\pi/5) + 1}$.

6.2 Kutovi

Pišimo $\Delta x/b = X_0 + X_1p$ i $\Delta y/b = k + Y_0 + Y_1p$ za komponente dužine u razvijenoj slici. Tada je, uz $\beta = 2\pi/5$,

$$\theta_t = \begin{cases} \arctan \frac{\Delta y}{|\Delta x|} - \frac{\pi}{5}, & t \in \{1, 2, 4\}, \\ \frac{4\pi}{5} - \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x}, & t \in \{3, 5, 6\}, \\ \arctan \frac{\Delta y}{|\Delta x|} - \frac{3\pi}{5}, & t \in \{7, 8\}, \end{cases}$$

pri čemu tri slučaja odgovaraju predznaku od Δx i vrijednosti i ; vidi Poglavlje 8. Na $p \in [0, \frac{1}{2}]$ predznak od Δx unutar klase se ne mijenja, pa svaka klasa koristi jedan te isti slučaj kroz cijeli raspon. Koeficijenti su u Tablici 2.

Napomena 6.1 (Negativni kutovi). Klase d_7 i d_8 imaju $\theta < 0$ pri $k = 3,5$, $p = 0,25$. To nije posljedica izbora jedne od dviju zrcalnih blizanki: blizanke daju θ i $180^\circ - \theta$, i obje ostaju negativne. Negativan θ jednostavno znači da mrav kreće na drugu stranu referentnog smjera svoje baze nego kod klasa $d_1, \dots, d_6$.

6.3 Pragovi i rasponi

Dvije od osam klasa ne postoje za mali p , u smislu Odjeljka 5.2:

$$d_7 : p \geq 0,035106\dots \quad (\text{prag tek za } k > 3), \quad d_8 : p \geq 0,107422\dots \quad (\text{tek za } k > 2).$$

Vezujući je uvjet u oba slučaja kvadratna jednadžba $Ap^2 + Bp + C = 0$ s

$$d_7 : A = \sin \frac{2\pi}{5}, \quad B = 0,9510565k - 0,5020285, \quad C = 0,6024343 - 0,2008114k,$$

$$d_8 : A = \sin \frac{\pi}{5}, \quad B = 0,9510565k - 0,5877853, \quad C = 0,4016228 - 0,2008114k,$$

a uvjet $C < 0$ upravo je $k > 3$, odnosno $k > 2$.

Spojimo li izvedivost s uvjetom $d < D$, rasponi p na kojima je svaka klasa stvarno kraći put glase, pri $k = 3,5$:

klasa	X_0	X_1	Y_0	Y_1
d_1	$-\frac{10-3\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
d_2	$-\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	0	$\frac{5+\sqrt{5}}{4}$
d_3	$+\frac{10-3\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
d_4	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	0
d_5	$+\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	0	$\frac{5+\sqrt{5}}{4}$
d_6	$+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	0
d_7	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{4}$
d_8	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{3(\sqrt{5}-1)}{4}$	0

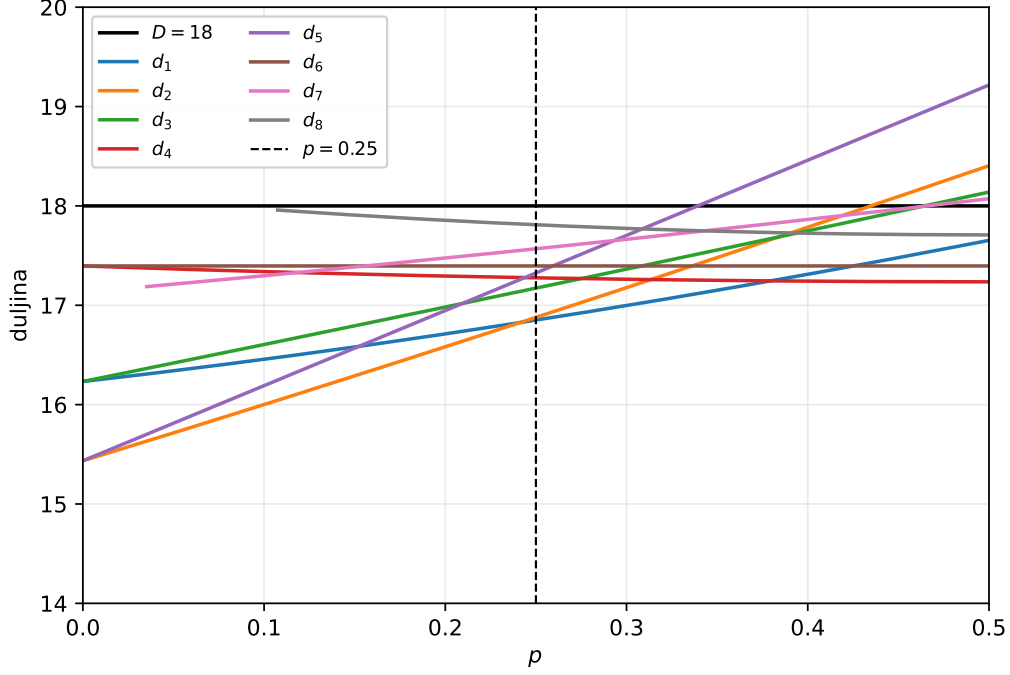
Tablica 2: Komponente osam klasa: $\Delta x/b = X_0 + X_1p$, $\Delta y/b = k + Y_0 + Y_1p$.

klasa	od	do	klasa	od	do
d_1	0	0,5	d_5	0	0,33927
d_2	0	0,43488	d_6	0	0,5
d_3	0	0,46441	d_7	0,03511	0,46594
d_4	0	0,5	d_8	0,10742	0,5

6.4 Graf

Slika 9 prikazuje svih osam duljina u ovisnosti o p za $b = 4$, $k = 3,5$, zajedno s očitim putem $D = 18$. Krivulje d_7 i d_8 počinju tek na svojim pragovima.

Napomena 6.2 (Numeracija je lokalna). Oznake $d_1, \dots, d_8$ poredane su po duljini pri $k = 3,5$, $p = 0,25$, a taj se poredak drugdje ne održava. Slika to izravno pokazuje: blizu $p = 0$ krivulje d_5 i d_2 leže ispod d_1 . Isto se događa dok se k mijenja; pri $k = 2$ i malom p poredak je $d_2, d_5, d_1, d_3, d_4, d_6, d_7, d_8$. Za bilo što izvan fiksnog (k, p) sigurnije je dakle klasu imenovati parom indeksa (i, j) , koji je strukturan, a rang navoditi zasebno.



Slika 9: Osam klasa na peterostranoj prizmi, $b = 4$, $k = 3,5$. Vodoravna linija je očiti put $D = 18$; d_6 je vodoravan jer ne ovisi o p . Krivulje d_7 i d_8 počinju na $p = 0,0351$ odnosno $p = 0,1074$.

7 Valjak

Valjak je bio pitanje koje je izvorno odolijevalo. Ovdje se obrađuje kao granica $n \rightarrow \infty$ pravilne n -prizme, što se pokazuje dovoljnim da se dobije upravljачka jednadžba bez ikakve nove geometrije.

Neka je r polumjer, pa je visina baze $b = 2r$; pišemo $h = 2kr$ i $D = h + 2r = 2r(k + 1)$. Mrav je na udaljenosti $2rp$ od ruba, mjereno po promjeru, a jednako tako i med.

7.1 Granica opće formule

Uz $b = 1$, $w = \frac{1}{2} - p$, i pišući $x = i\beta$, $y = j\beta$ za kutove kotrljanja dviju baza, opće komponente iz Poglavlja 8 postaju, kad $n \rightarrow \infty$ (pa $\sigma \rightarrow 0$ i $\rho \rightarrow \frac{1}{2}$),

$$\Delta x = \frac{y - x}{2} - w(\sin x + \sin y), \quad \Delta y = (k + 1) - w(\cos y - \cos x). \quad (28)$$

Propozicija 7.1 (Izvedivost postaje stacionarnost). *U granici $n \rightarrow \infty$ dva uvjeta izvedivosti iz Poglavlja 8 podudaraju se s uvjetima stacionarnosti duljine:*

$$\frac{\partial d^2}{\partial x} = -2F_1, \quad \frac{\partial d^2}{\partial y} = 2F_2,$$

gdje je

$$F_1 = \Delta x \left(\frac{1}{2} + w \cos x \right) + \Delta y w \sin x, \quad F_2 = \Delta x \left(\frac{1}{2} - w \cos y \right) + \Delta y w \sin y.$$

Tako i treba biti. Na poligonalnoj bazi uvjet je diskretan — dužina mora presjeći određenu stranicu — dok na glatkoj plohi postaje uvjet da duljina bude stacionarna.

7.2 Odakle simetrija

U izvornoj obradi odnos $x_1 = \pi - x$ između dva kutova kotrljanja bio je postavljen kao zapažanje. On je zapravo prisilan:

Propozicija 7.2 (Dvije grane).

$$F_1 - F_2 = 2w \cos \frac{x+y}{2} \left[\Delta x \cos \frac{x-y}{2} + \Delta y \sin \frac{x-y}{2} \right].$$

Stoga svaka stacionarna točka leži na jednoj od

$$(A) \quad x + y = \pi, \quad (B) \quad \tan \frac{x-y}{2} = -\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Grana (A) je simetrija $x_1 = \pi - x$. Na njoj je $\sin y = \sin x$ i $\cos y = -\cos x$, pa uz $q := 1 - 2p = 2w$

$$\Delta x = \frac{\pi}{2} - x - q \sin x, \quad \Delta y = (k+1) + q \cos x,$$

a dva se uvjeta stapaju u jedan:

$$k q \sin x + \left(\frac{\pi}{2} - x \right) (1 + q \cos x) = 0, \quad \text{tj.} \quad k = \frac{(x - \frac{\pi}{2})(\cos x + \frac{1}{1-2p})}{\sin x}. \quad (29)$$

Grana (B) također daje stacionarne točke, ali ni u jednom ispitanom slučaju — $k \in \{1,5; 2; 3,5; 8\}$, $p \in \{0,1; 0,25; 0,4\}$ — nijedna od njih nije kraća od očitog puta. Zato valjak ima samo jedan kraći put: ne zato što druge stacionarne točke ne postoje, nego zato što su sve dulje od D .

7.3 Zatvoreni parametarski oblik

Jednadžba (29) transcendentna je u x i ne postoji elementarni izraz za x preko k . Izvorna obrada ju je stoga rješavala numerički i dobiveni x uvrštavala u drugu formulu. Taj se korak može izbjeći: sam k se može eliminirati.

Iz (29) slijedi $\Delta y = -\Delta x \frac{1 + q \cos x}{q \sin x}$, pa

Teorem 7.3 (Parametarsko rješenje za valjak). *Uz $q = 1 - 2p$ i $b = 2r$, kraći put na valjku dan je parametarski s*

$$k(x) = \frac{(2x - \pi)(1 + q \cos x)}{2q \sin x}, \quad d(x) = 2r \frac{|\pi - 2x - 2q \sin x| \sqrt{q^2 + 2q \cos x + 1}}{2q |\sin x|}, \quad (30)$$

pa je

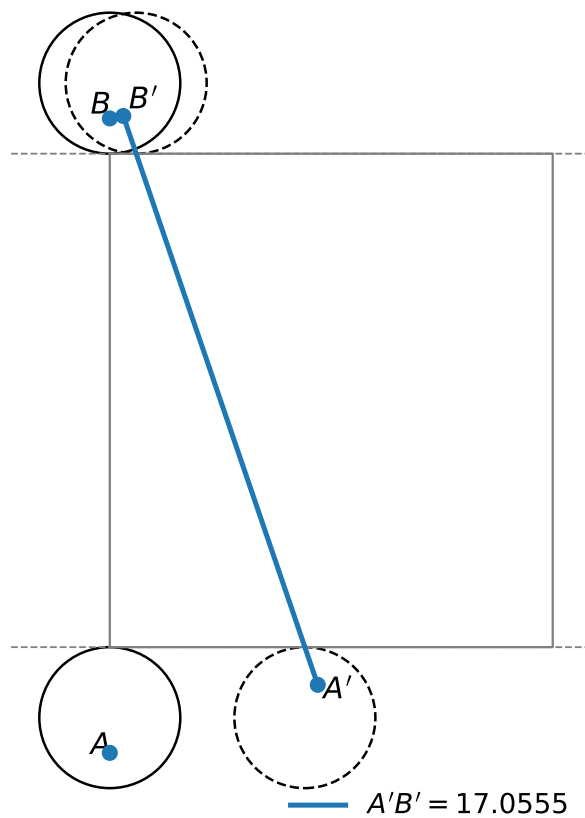
$$\frac{d}{D}(x) = \frac{|\pi - 2x - 2q \sin x| \sqrt{q^2 + 2q \cos x + 1}}{|(2x - \pi)(1 + q \cos x) + 2q \sin x|}.$$

Sve je simbolički; promijenila se samo parametrizacija, s k na x . Izborom x dobivamo par (k, d) izravno, a pitanja poput “koji k minimizira d/D ” postaju jednodimenzionalni problemi u x .

7.4 Slučaj $p = 0$

Za $p = 0$ je $q = 1$, a član koji nosi k u (29) sadrži $\sin x$, pa je $x = \pi$ rješenje za svaki k . Uvrštavanjem dobivamo $\Delta x = -\pi/2$ i $\Delta y = k$, dakle

$$d_0 = 2r \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + k^2} = r \sqrt{\pi^2 + 4k^2}. \quad (31)$$



Slika 10: Razvoj valjka, $b = 2r = 4$, $k = 3,5$, $p = 0,25$. Pune kružnice su baze u početnom položaju, isprekidane nakon kotrljanja: mravlja (donja) baza za $x = 2,76738$, a medna (gornja) za $y = \pi - x = 0,37421$ radijana, pri čemu je njihov zbroj π — simetrija grane (A). Ravna dužina $A'B'$ ima duljinu 17,0555 naspram $D = 18$.

To je jedina vrijednost p za koju postoji zatvoreni oblik u k . Put je jednostavno onaj koji obide točno pola valjka: vodoravni raspon πr , okomiti h .

Iz (31), $d_0 < D = 2r(k+1)$ traži

$$k > \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} = 0,73370\dots,$$

a minimiziranje d_0/D daje

$$k_{opt} = \frac{\pi^2}{4} = 2,4674\dots, \quad \frac{d}{D} = 0,8436\dots$$

7.5 Numeričke vrijednosti

p	$k_{\min}$	k_{opt}	d/D pri k_{opt}
0	0,7337	2,467	0,8436
0,01	0,7482	2,497	0,8484
0,05	0,8019	2,623	0,8672
0,25	0,9541	3,564	0,9475
0,40	0,9932	5,652	0,9885

Ovdje je $k_{\min}$ najmanji k za koji postoji kraći put, a k_{opt} onaj koji daje najveću relativnu uštedu. Kako p raste, ušteda se smanjuje: pri $p = 0,4$ najbolji mogući dobitak jedva je jedan posto.

Primjer 7.4. Za $r = 2$, $k = 3,5$, $p = 0,25$ rješavanje (29) daje $x = 2,76738$, pa je $y = \pi - x = 0,37421$, i $d = 17,05550$ naspram $D = 18$. U konvenciji Poglavlja 8 kut x pripada mravljivoj bazi, a y mednoj; zrcalno-ekvivalentni put, u kojem se uloge dvaju kutova zamijene, nastaje smjesti li se mrav na udaljenost bp (umjesto $b(1-p)$) od ruba razvijanja i ima istu duljinu.

8 Jedna formula za svaku prizmu

Četiri gore obrađene prizme računane su jedna po jedna. Nije nužno tako: jedan par formula daje duljinu i smjer svakog kandidata na svakoj pravilnoj prizmi, a valjak slijedi kao granica. Ovo poglavlje to iskazuje.

8.1 Komponente

Teorem 8.1 (Opće komponente). *Neka je $n \geq 3$, $\beta = 2\pi/n$, i stavimo*

$$\sigma = \frac{s}{b} = \begin{cases} 2 \tan \frac{\pi}{2n}, & n \text{ neparan} \\ \tan \frac{\pi}{n}, & n \text{ paran} \end{cases} \quad \rho = \frac{r}{b} = \begin{cases} \frac{\cos(\pi/n)}{1 + \cos(\pi/n)}, & n \text{ neparan} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

Za put dobiven kotrljanjem donje baze i koraka i gornje baze j koraka, uz $u = p - \rho$, $v = p - 1 + \rho$ i $m = j - i$, vrijedi, u jedinicama b ,

$$\frac{\Delta x}{b} = m\sigma + u \sin(j\beta) + v \sin(i\beta), \quad \frac{\Delta y}{b} = k + 2\rho + u \cos(j\beta) - v \cos(i\beta), \quad (32)$$

i $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Raspisano,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{b^2} &= m^2\sigma^2 + (k + 2\rho)^2 + u^2 + v^2 - 2uv \cos((i+j)\beta) \\ &\quad + 2m\sigma(u \sin(j\beta) + v \sin(i\beta)) + 2(k + 2\rho)(u \cos(j\beta) - v \cos(i\beta)). \end{aligned} \quad (33)$$

Dokaz. Prema Lemi 1.5 središte poligona D_i je u $((i + \frac{1}{2})s, Y_d - r)$, a preslikavanje $D_0 \rightarrow D_i$ je direktna izometrija s kutom rotacije $i\beta$. Kako je $Y_d = b$ i središte od D_0 na visini $b - r = c$, položaj mrava u odnosu na to središte je $A_0(p) - O_A(0) = (0, bp - c)$, što ne ovisi o kotrljanju. Stoga je

$$A_i(p) = O_A(i) + \rho_{i\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ bp - c \end{pmatrix}, \quad B_j(p) = O_B(j) + \rho_{-j\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ bp - r \end{pmatrix},$$

gdje je ρ_θ rotacija za kut θ , pa je $\rho_\theta(0, \mu) = (-\mu \sin \theta, \mu \cos \theta)$. Oduzimanjem i dijeljenjem s b dobivamo (32); kvadriranjem i primjenom $\cos(i\beta) \cos(j\beta) - \sin(i\beta) \sin(j\beta) = \cos((i + j)\beta)$ dobivamo (33). $\square$

Formula (32) reproducira svaku formulu iz Poglavlja 3–6. Provjerena je simbolički protiv svih jedanaest ručno izvedenih formula za duljinu za $n = 3, 4, 6$ te protiv d_6 za $n = 5$, a numerički protiv konstruirane geometrije na 4802 kraća puta za $n = 3, \dots, 15$, uz najveće odstupanje $4,3 \cdot 10^{-14}$.

8.2 Kutovi

Definicija 8.2 (Konvencija za kut). Kut pod kojim mrav kreće mjeri se u sustavu njegove vlastite baze, dakle zakrenuto natrag za $i\beta$:

$$\theta = i\beta - \alpha, \quad \alpha = \text{atan2}(\Delta y, \Delta x).$$

Kako je uvijek $\Delta y > 0$, vrijedi $\alpha \in (0, \pi)$ i atan2 se razrješava u

$$\theta = \begin{cases} \frac{2i\pi}{n} - \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x}, & \Delta x > 0, \\ \arctan \frac{\Delta y}{|\Delta x|} + \frac{(2i - n)\pi}{n}, & \Delta x < 0, \\ \frac{2i\pi}{n} - \frac{\pi}{2}, & \Delta x = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Pomak u srednjem retku, $i\beta - \pi = (2i - n)\pi/n$, objašnjava svaku konstantu koja se pojavljuje u formulama za kut iz ranijih poglavlja: $-\pi/3$ za $n = 3$ uz $i = 1$, nulu za $n = 4$ uz $i = 2$ i za $n = 6$ uz $i = 3$, $-\pi/3$ za $n = 6$ uz $i = 2$, te $-\pi/5$ za $n = 5$ uz $i = 2$. Formule oblika “konstanta minus arctan” slučaj su $\Delta x > 0$, gdje je konstanta $2i\pi/n$. Svih dvanaest ručno izvedenih formula za kut provjereno je protiv (34) na cijelom rasponu $k \in [2, 6]$, $p \in [0; 0,45]$, uz najveće odstupanje $2,8 \cdot 10^{-14}$.

8.3 Izvedivost

Ravna dužina u razvijenoj slici jest put na prizmi samo ako ostaje unutar materijala. Kriterij je egzaktan i ne traži nikakvo uzorkovanje.

Lema 8.3 (Kriterij izvedivosti). *Neka je $A \in D_i$, $B \in G_j$, i neka dužina $[A, B]$ siječe pravce $y = Y_d$ i $y = Y_g$ u $P = (x_P, Y_d)$ i $Q = (x_Q, Y_g)$. Tada je*

$$[A, B] \subseteq D_i \cup \Pi \cup G_j \iff x_P \in [is, (i + 1)s] \text{ i } x_Q \in [js, (j + 1)s].$$

Dokaz. D_i je konveksan, leži u $y \leq Y_d$, a presijeca pravac $y = Y_d$ točno u svojoj dodirnoj stranici $[is, (i + 1)s]$ (Lema 1.5). Ako x_P leži u tom intervalu, onda je $P \in D_i$, pa konveksnost daje $[A, P] \subseteq D_i$; slično za $[Q, B] \subseteq G_j$. Srednji dio leži u traci, čija je svaka točka točka površine, jer je traka razvoj plašta i smije se neograničeno produljiti. Obratno, ako dužina leži u uniji, onda P , koji ima y -koordinatu Y_d i kojem se prilazi odozdo, mora ležati u D_i , dakle u dodirnoj stranici. $\square$

U zatvorenom obliku: uz

$$\alpha = \rho - v \cos(i\beta), \quad \gamma = \rho + u \cos(j\beta), \quad \Delta y = k + \alpha + \gamma,$$

i $\hat{x}_A = \frac{\sigma}{2} - v \sin(i\beta)$, $\hat{x}_B = (m + \frac{1}{2})\sigma + u \sin(j\beta)$ (oboje mjereno od is), kriterij glasi

$$0 \leq \hat{x}_A + \frac{\alpha}{\Delta y} \Delta x \leq \sigma, \quad m\sigma \leq \hat{x}_B - \frac{\gamma}{\Delta y} \Delta x \leq (m+1)\sigma. \quad (35)$$

Napomena 8.4. Uzorkovanje dužine konačnim brojem točaka nije pouzdana zamjena. Blizu granice izvedivosti prekoračenje je reda 10^{-5} i lako se previdi; a kad je $p = 0$, mrav leži točno na rubu svoje baze, gdje su rutine tipa “je li točka u poligonu” nepouzdana i mogu odbaciti posve valjan put. U sustavnoj usporedbi na 12 525 konfiguracija, test uzorkovanjem razišao se s (35) u 639 slučajeva: pogrešno je odbacio 565 valjanih puteva (sve pri $p = 0$) i pogrešno prihvatio 74 nevaljana.

8.4 Pragovi u p

Propozicija 8.5 (Izvedivost kao kvadratna funkcija od p). *Pišimo*

$$G_P(p) = \left(\frac{\sigma}{2} - v \sin(i\beta)\right) \Delta y + \alpha \Delta x, \quad G_Q(p) = \left(\frac{\sigma}{2} + u \sin(j\beta)\right) \Delta y - \gamma \Delta x.$$

Tada je put izvediv točno kad

$$G_P \geq 0, \quad \sigma \Delta y - G_P \geq 0, \quad G_Q \geq 0, \quad \sigma \Delta y - G_Q \geq 0,$$

a svaka je od njih kvadratna funkcija od p s istim vodećim koeficijentom

$$[p^2] G_P = [p^2] G_Q = -\sin((i+j)\beta).$$

Posebno, uvjeti se degeneriraju u linearne točno kad $n \mid 2(i+j)$.

Dokaz. Množenjem (35) s $\Delta y > 0$ dobivamo četiri navedene nejednadžbe. Svaka od veličina u , v , Δx , α , γ , Δy afina je u p , pa je svaki umnožak kvadratan. Za vodeći koeficijent deriviramo: $dv/dp = 1$, $d\alpha/dp = -\cos(i\beta)$, $d\Delta y/dp = \cos(j\beta) - \cos(i\beta)$ i $d\Delta x/dp = \sin(i\beta) + \sin(j\beta)$, pa je

$$[p^2] G_P = -\sin(i\beta)(\cos(j\beta) - \cos(i\beta)) - \cos(i\beta)(\sin(j\beta) + \sin(i\beta)) = -\sin((i+j)\beta),$$

i isti račun za G_Q . □

Pragovi p_{min} stoga su korijeni običnih kvadratnih jednadžbi, dostupni u zatvorenom obliku; primjeri za šesterostranu i peterostranu prizmu iz Odjeljaka 5.2 i 6 su instance toga.

8.5 Neparne i parne prizme

Dvije posljedice formule (32) zaslužuju izdvajanje, jer su strukturna jezgra cijelog predmeta. Klasu zovemo *p-neovisnom* ako njezina duljina ne ovisi o p .

Teorem 8.6 (Parne prizme). *Neka je n paran. Tada svaka p -neovisna klasa zadovoljava $m = j - i \in 2\mathbb{Z}$ i*

$$d = b\sqrt{(m\sigma)^2 + (k+1)^2} \geq D,$$

uz jednakost ako i samo ako $i = j$. Nijedna parna prizma nema p -neovisan put kraći od očitog, ni za koji $k > 0$, ni za koji p , uključujući i spiralne puteve.

Dokaz. Za parni n je $\rho = \frac{1}{2}$, pa je $u = v$ i, prema Definiciji 1.2, $\varepsilon = 0$. Kratak račun iz (32) (proveden u cijelosti u Dodatku A) tada daje $\Delta x = m\sigma b$ i $\Delta y = D$ za svaki p -neovisan par, odakle tvrdnja. □

Teorem 8.7 (Neparne prizme). *Neka je $n \geq 3$ neparan. Tada za svaki $k > 0$ i svaki $p \in [0, \frac{1}{2}]$ par $(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ daje p -neovisan, geometrijski izvediv, nespiralan put duljine*

$$d = b\sqrt{k^2 + 2k \cos \frac{\pi}{n} + 1} < D.$$

Dokaz je Dodatak A. Mehanizam je asimetrija $\varepsilon = R - r$ iz Definicije 1.2: ona je jedini član u (32) sposoban smanjiti okomitu komponentu ispod D , a pozitivna je točno za neparni n .

Napomena 8.8 (Što nije općenito). Formula (32) daje točne vrijednosti za svaki n . Ono što ne može uvijek dati jest *uredan* zatvoreni oblik. Izrazi s kvadratnim korijenima, kakvi su dobiveni za $n = 3, 4, 5, 6$, postoje samo kad je pravilni n -terokut konstruktibilan ravnalom i šestarom, tj. za

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, \dots$$

Za $n = 7$ je $\cos(\pi/7)$ korijen ireducibilne kubne jednadžbe s tri realna korijena (*casus irreducibilis*) i ne može se zapisati samo kvadratnim korijenima. Formula i dalje daje točnu vrijednost; koeficijenti jednostavno ostaju u obliku $\cos(\pi/7)$, $\sin(3\pi/14)$ i slično. Isto vrijedi za $n = 9, 11, 13, 14, 18, 19, \dots$

Primjer 8.9 (Sedmerostrana prizma). Pri $b = 4$, $k = 3,5$, $p = 0,25$ prizma s $n = 7$ ima trinaest klasa kraćih puteva. Klasa s parom indeksa $(3, 4)$ jedina je čije komponente ne sadrže p ; prema Teoremu 8.7 njezina je duljina $b\sqrt{k^2 + 2k \cos(\pi/7) + 1}$, i doista je $2 \cos(\pi/7) = 1,801938\dots$

9 Kada uopće nema kraćeg puta?

Četverostrana prizma traži $k > 3/2$ prije nego što uopće postoji ušteda, čak i s mravom na rubu (Poglavlje 3); trostrana ne traži ništa (Napomena 4.2). Ovo poglavlje rješava pitanje za svaki n .

9.1 Neparne prizme

Prema Teoremu 8.7 p -neovisni put duljine $b\sqrt{k^2 + 2k \cos(\pi/n) + 1}$ strogo je kraći od D za svaki $k > 0$ i svaki p . Neparne prizme dakle nikad nemaju prag po visini.

9.2 Parne prizme

Ovdje p -neovisni putevi nikad nisu kraći (Teorem 8.6), pa prag određuje neka druga klasa. S mravom na rubu, $p = 0$, najbolji je par $(i, j) = (n/2, 0)$, za koji (32) daje

$$\Delta x = -\frac{n}{2} b \tan \frac{\pi}{n}, \quad \Delta y = h.$$

Kako je $b = s \cot(\pi/n)$ za parni n , vrijedi $\frac{n}{2} b \tan(\pi/n) = \frac{ns}{2} = \frac{P}{2}$, polovica opsega baze. To je dakle put koji obiđe točno pola plašta, od rubne točke do dijametralno suprotne rubne točke, i

$$d = \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 + h^2},$$

izravni analogon valjkove formule $d_0 = \sqrt{(\pi r)^2 + h^2}$ iz (31).

Uvjet $d < D = h + b$ postaje $\left(\frac{P}{2}\right)^2 < 2hb + b^2$, odnosno:

Teorem 9.1 (Prag po visini za parne prizme). *Za parni n kraći put postoji ako i samo ako je*

$$k > k_{\min}(n) = \frac{n^2 \tan^2(\pi/n)}{8} - \frac{1}{2}.$$

n	$k_{\min}(n)$	točno	ima li kraćeg puta pri $k = 1$?
4	1,5	$3/2$	ne
6	1,0	1	na samoj granici: $d = D$
8	0,87258		da
10	0,81966		da
12	0,79234		da
20	0,75428		da
50	0,73696		da
∞	0,73370	$\pi^2/8 - \frac{1}{2}$	da (valjak)

Kako $n \tan(\pi/n)$ pada prema π , prag pada monotono do valjkove vrijednosti $\pi^2/8 - \frac{1}{2}$ nađene u Poglavlju 7. Uvjet $k_{\min}(n) \leq 1$ ekvivalentan je s

$$n \tan \frac{\pi}{n} \leq 2\sqrt{3} = 3,4641 \dots,$$

što ne vrijedi za $n = 4$ (lijeva strana 4), vrijedi s jednakosti za $n = 6$ (lijeva strana $6 \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$), a strogo vrijedi od $n = 8$ nadalje. Četverostrana je prizma dakle jedina koja pri $k = 1$ nema kraći put, a šesterostrana je točno na granici. Dopuštanje spiralnih puteva ne snižava nijedan od tih pragova, kako se i očekuje — veći $|m|$ znači veći $|\Delta x|$. Smjer “samo ako” Teorema 9.1 počiva na tome da je par $(n/2, 0)$ pri $p = 0$ optimalan; izravno pretraživanje po svim parovima, svim $p \in [0, \frac{1}{2}]$ i svim $|m|$, uključujući i spiralne puteve, potvrđuje da tik ispod $k_{\min}(n)$ nijedan izvediv put nije kraći od D ni za koji p (provjereno za $n = 4, 6, 8$).

9.3 Pragovi u p : koje su prizme pogođene

Odjeljak 5.2 pokazao je da na šesterostranoj prizmi dvije od četiri klase ne postoje za mali p . Ta je pojava pravilo, a ne iznimka. Brojeći parove (i, j) koji su negdje na $p \in [0, \frac{1}{2}]$ kraći od D , i među njima one koji nisu izvedivi pri $p = 0$:

n	$k = 2$		$k = 3,5$		$k = 8$	
	ukupno	s pragom	ukupno	s pragom	ukupno	s pragom
3	8	0	10	0	10	0
4	6	0	6	0	6	0
5	18	2	18	6	22	14
6	12	0	12	6	16	14
7	28	14	30	22	34	26
8	20	14	20	14	26	24
10	30	24	30	28	38	36
12	42	36	42	40	50	48

Dvije pravilnosti:

- Trostrana i četverostrana prizma su iznimke: nijedna klasa koja je kraća od D nema prag izvedivosti, ni za koji k . (Trostrana ima parove s pragom — npr. $(0, 3)$ od $p = 0,25$ pri $k = 3,5$ — ali ti putevi nikad nisu kraći od D , pa se na grafu poput Slike 9 ne bi ni pojavili.)
- Od $n = 5$ nadalje pojava se javlja kod obiju parnosti, a udio pogođenih klasa raste s n i s k ; pri $n = 12$, $k = 8$ to je 48 od 50.

U zbroj ulaze i klase koje su kraće od D samo u pojasu blizu $p = \frac{1}{2}$ — analogoni klase d_5 na trostranoj prizmi (Odjeljak 4.3). Od $n = 5$ nadalje takva klasa pri $p = 0$ smješta svoju točku daleko od središta baze i ondje nije izvediva, pa pridonosi stupcu “s pragom”; na samoj trostranoj

prizmi analogna klasa $(0, 1)$ izvediva je za svaki p , zbog čega redak $n = 3$ ostaje na nuli. Kod peterostrane prizme — najmanje neparne koja je pogođena — klase su u pitanju pri $k = 3, 5$ klase d_7 i d_8 , čiji se pragovi javljaju tek za $k > 3$ odnosno $k > 2$ (Poglavlje 6), zajedno s parom $(1, 2)$ i njegovim zrcalom $(4, 3)$, klasom upravo ove potonje vrste; pri $k = 2$ taj je par jedini.

10 Tri hipoteze

Gornja poglavlja opisuju što se događa na zadanoj prizmi. Ostaju tri pitanja o tome kako se odgovori ponašaju dok se prizma mijenja. Izvorno su postavljena kao hipoteze; sve tri su riješene u dodacima, premda ne sve na očekivani način.

Posvuda “kraći put” znači klasu puteva jednake duljine, kraću od očitog puta D .

H1: p -neovisan put

H1. Svaka neparna pravilna prizma ima barem jedan p -neovisan kraći put, tj. kraći put čija duljina ne ovisi o udaljenosti točaka A i B od ruba, dok ga parne prizme nemaju. Duljina najkraćeg je

$$d = b\sqrt{k^2 + 2k \cos \frac{\pi}{n} + 1}.$$

To je točno, a Dodatak A daje potpun dokaz. Jedna pojedinost u formulaciji traži pažnju: parne prizme ipak posjeduju p -neovisne puteve — beskonačno mnogo klasa — ali nijedan nije kraći od očitog puta. Ispravna je tvrdnja Teorem 8.6 zajedno s Teoremom 8.7.

Dodatak rješava i jedinstvenost, koja ne vrijedi bezuvjetno: gornji je put jedini kraći p -neovisan dok je $k < k^*(n)$, gdje je $k^*(n) \geq 6$ za svaki neparni n , uz jednakost točno za $n = 3$. Iznad tog praga pojavljuju se daljnje klase; za $n = 5$ druga pri $k > 22, 47$.

H2: mnogo prizmi, ograničena visina

H2. Broj kraćih puteva je neograničen kada n raste a parametar k ostaje ograničen, čak i kad dozvoljavamo samo n kotrljanja gornje i donje baze — tj. ne računamo spiralne puteve.

To nije točno. Dodatak B pokazuje da za svaki fiksni $k \neq 1$ broj klasa saturira: prestaje se mijenjati oko $n \approx 100$ i dalje ostaje konstantan — 19 klasa pri $k = 2$, 11 pri $k = 3, 5$, 9 pri $k = 5$ (sve uz $p = 0, 25$).

Postoji točno jedna iznimka, i ona je oštra. Pri $k = 1$, za svaki p , broj raste neograničeno, otprilike kao $\sqrt{n}$. Razlog je degeneracija: dvije krivulje koje u granici $n \rightarrow \infty$ opisuju izvedivost postaju tangencijalne točno kad je $k = 1$, a determinanta koja mjeri njihovu transversalnost iznosi $-(k - 1)(2p - 1)$.

H3: jedna prizma, neograničena visina

H3. Broj kraćih puteva je neograničen, za svaki n , kada parametar k raste neograničeno, ali samo ako dozvoljavamo neograničen broj kotrljanja gornje i donje baze, tj. ako dopuštamo spiralne puteve.

Obje su polovice točne. Dodatak C dokazuje prvu i kvantificira je: broj puteva asimptotski je $C(n, p)\sqrt{k}$ s eksplicitnom konstantom, koja se s mjerenjem slaže na 0,4%. Drugu polovicu potvrđuju brojevi: ograničeno na $0 \leq i, j \leq n$, broj saturira i ne mijenja se između $k = 10^3$ i $k = 10^5$.

Napomena o njima dvjema

H2 i H3 ovise o istom omjeru: širini σ dodirne stranice naspram raspona koji treba pokriti. Kod H2 broj stranica raste, $\sigma \sim 1/n$ se steže, i uvjeti izvedivosti stisnu se iz nejednadžbi u jednadžbe — zbog čega H2 pada. Kod H3 prizma je fiksna, σ ostaje, uvjeti ostaju nejednadžbe, a raste raspon od m — zbog čega H3 vrijedi.

A Dokaz hipoteze H1

Ovaj dodatak dokazuje da svaka neparna pravilna prizma ima p -neovisan put strogo kraći od očitog, da ga nijedna parna prizma nema, i rješava pitanje jedinstvenosti. Oznake su one iz Poglavlja 1 i 8; posebno $\beta = 2\pi/n$, $c = b - r$, $\varepsilon = c - r = b - 2r$ i $D = h + b$.

A.1 Kriterij p -neovisnosti

Definicija A.1. Za $i, j \in \mathbb{Z}$ stavimo $d_{ij}(p) = \|B_j(p) - A_i(p)\|$. Par (i, j) je p -neovisan ako je d_{ij} konstantna na $[0, \frac{1}{2}]$.

Prema dokazu Teorema 8.1 izometrije kotrljanja ne ovise o p , dok su $A_0(p)$ i $B_0(p)$ affine u p ; stoga su A_i i B_j affine u p s konstantnim vektorima brzine

$$A'_i(p) = \begin{pmatrix} -b \sin(i\beta) \\ b \cos(i\beta) \end{pmatrix}, \quad B'_j(p) = \begin{pmatrix} b \sin(j\beta) \\ b \cos(j\beta) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Lema A.2. Par (i, j) je p -neovisan ako i samo ako je $A'_i(p) = B'_j(p)$.

Dokaz. Pišimo $v(p) = B_j(p) - A_i(p) = v_0 + p v_1$ uz konstantan $v_1 = B'_j - A'_i$. Tada je

$$\|v(p)\|^2 = \|v_0\|^2 + 2p(v_0 \cdot v_1) + p^2\|v_1\|^2,$$

kvadratna funkcija u p . Ona je konstantna na intervalu pozitivne duljine ako i samo ako iščezavaju koeficijenti uz p^2 i p , tj. ako i samo ako je $\|v_1\|^2 = 0$, odnosno $v_1 = 0$. Obrat je neposredan. $\square$

Lema A.3. Par (i, j) je p -neovisan ako i samo ako $i + j \equiv 0 \pmod{n}$.

Dokaz. Prema Lemi A.2 i (36) uvjet glasi $-\sin(i\beta) = \sin(j\beta)$ i $\cos(i\beta) = \cos(j\beta)$, tj. $e^{ij\beta} = e^{-i\beta}$, tj. $(i + j)\beta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Kako je $\beta = 2\pi/n$, to je $n \mid i + j$. $\square$

Napomena A.4. Uvjet uključuje i $i + j = 0$, dakle par $(0, 0)$: sam očiti put je p -neovisan, duljine točno D . Tu trivijalnu klasu ne smije se previdjeti pri brojanju.

A.2 Duljina p -neovisnog puta

Teorem A.5. Neka je $i + j \equiv 0 \pmod{n}$, i stavimo $\theta = i\beta$, $m = j - i$. Tada je vektor $v = B_j(p) - A_i(p)$ konstantan, uz

$$\Delta x = ms - \varepsilon \sin \theta, \quad \Delta y = D - \varepsilon(1 - \cos \theta), \quad (37)$$

pa je $d_{ij} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Dokaz. Iz $n \mid i + j$ slijedi $j\beta \equiv -i\beta$, pa $\sin(j\beta) = -\sin \theta$ i $\cos(j\beta) = \cos \theta$. Uvrštavanjem u izraze iz Teorema 8.1, pisane u apsolutnim duljinama,

$$\begin{aligned} \Delta x &= ms + (bp - r) \sin(j\beta) + (bp - c) \sin \theta = ms + \sin \theta [(bp - c) - (bp - r)] = ms - \varepsilon \sin \theta, \\ \Delta y &= h + 2r + (bp - r) \cos \theta - (bp - c) \cos \theta = h + 2r + \varepsilon \cos \theta. \end{aligned}$$

Kako je $b = 2r + \varepsilon$, vrijedi $h + 2r = h + b - \varepsilon = D - \varepsilon$, što daje drugu formulu. Parametar p se pokratio, što usput ponovno dokazuje smjer “ako” u Lemi A.3. $\square$

A.3 Parne prizme

Teorem A.6 (Teorem 8.6, dokazan). *Neka je n paran. Tada svaki p -neovisan par ima paran $m = j - i$*

$$d_{ij} = \sqrt{(ms)^2 + D^2} \geq D,$$

uz jednakost ako i samo ako $i = j$. Nijedna parna prizma nema p -neovisan put kraći od D , ni za koji $k > 0$, ni za koji p , uključujući spiralne puteve.

Dokaz. Za parni n Definicija 1.2 daje $\varepsilon = 0$, pa se (37) svodi na $\Delta x = ms$, $\Delta y = D$, neovisno o θ . Stoga je $d_{ij}^2 = (ms)^2 + D^2 \geq D^2$, uz jednakost točno kad je $m = 0$. Za parnost: n paran i $i + j = Mn$ prisiljavaju $i + j$ da bude paran, pa je i $m = (i + j) - 2i$ paran. $\square$

Teorem A.6 jači je i jednostavniji od tvrdnje da parne prizme nemaju p -neovisan put. Imaju ih mnogo; nijedan nije kraći. Na primjer, par $(2, 2)$ na četverostranoj prizmi je p -neovisan, izvediv i nespiralan, duljine točno D .

A.4 Neparne prizme: egzistencija

U ovom je odjeljku $n \geq 3$ neparan i

$$C = \cos \frac{\pi}{n}, \quad S = \sin \frac{\pi}{n}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2n}, \quad \tau = \tan \varphi,$$

pa iz Definicija 1.1 i 1.2 slijedi

$$s = 2b\tau, \quad \varepsilon = b\tau^2, \quad r = RC, \quad b = R(1 + C), \quad RS = \frac{s}{2}. \quad (38)$$

Teorem A.7 (Teorem 8.7, dokazan). *Neka je $n \geq 3$ neparan i $i = \frac{n-1}{2}$, $j = \frac{n+1}{2}$, dakle $i + j = n$ i $m = 1$. Tada za svaki $k > 0$ i svaki $p \in [0, \frac{1}{2}]$ vrijedi:*

- (i) *par je p -neovisan;*
- (ii) *dužina je geometrijski izvediva;*
- (iii) *njezina je duljina $d = b\sqrt{k^2 + 2k \cos(\pi/n) + 1}$;*
- (iv) *$d < D$, i to strogo.*

Dokaz. (i) Lema A.3, jer je $i + j = n$.

(iii) Ovdje je $\theta = i\beta = \pi - \pi/n$, pa $\sin \theta = S$ i $\cos \theta = -C$, a (37) daje $\Delta x = s - \varepsilon S$ i $\Delta y = D - \varepsilon(1 + C)$. Prema (38),

$$\varepsilon S = b\tau^2 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2b\tau \sin^2 \varphi = s \sin^2 \varphi = \frac{s}{2}(1 - C),$$

pa je $\Delta x = s - \frac{s}{2}(1 - C) = \frac{s}{2}(1 + C) = b\tau \cdot 2 \cos^2 \varphi = 2b \sin \varphi \cos \varphi = bS$. Slično, $\varepsilon(1 + C) = 2b \sin^2 \varphi = b(1 - C)$, pa $\Delta y = D - b(1 - C) = h + bC$. Dakle

$$d^2 = b^2 S^2 + (h + bC)^2 = b^2 + h^2 + 2hbC,$$

a uvrštavanjem $h = kb$ dobivamo (iii).

(iv) Iz istog računa, $d^2 - D^2 = b^2 + h^2 + 2hbC - (h + b)^2 = 2hb(C - 1) < 0$, jer je $h, b > 0$ i $C < 1$ za $n \geq 3$.

(ii) Primjenjujemo Lemu 8.3. Pomaknimo ishodište tako da je dodirna stranica od D_i interval $[0, s]$; kako je $j = i + 1$, dodirna stranica od G_j je $[s, 2s]$. Iz koordinata u dokazu Teorema 8.1, $y_A = c + (bp - c) \cos \theta = R - (bp - R)C$, pa uz $r = RC$ i $b = R(1 + C)$

$$Y_d - y_A = b - R + (bp - R)C = r + (bp - R)C = RC + bpC - RC = bpC,$$

i jednako tako, uz $r(1+C) = RC(1+C) = bC$,

$$y_B - Y_g = r - (bp - r)C = r(1+C) - bpC = bC(1-p).$$

Zbroj tih dviju veličina je bC , u skladu s $\Delta y = h + bC$. Stavimo

$$u := \frac{bC}{h+bC} = \frac{C}{k+C} \in (0, 1),$$

pa dužina dostiže $y = Y_d$ pri parametru $t_1 = pu$, a $y = Y_g$ pri t_2 uz $1-t_2 = (1-p)u$. Za vodoravne koordinate, $x_A = \frac{s}{2} - (bp-R)S = s - bpS$ koristeći $RS = \frac{s}{2}$, i $x_B = \frac{3s}{2} - (bp-r)S = \frac{3s}{2} + \frac{s}{2}C - bpS$ koristeći $rS = RCS = \frac{s}{2}C$. (Provjera: $x_B - x_A = \frac{s}{2}(1+C) = bS = \Delta x$.) Stoga je

$$x_P = x_A + t_1 \Delta x = s - bpS(1-u).$$

Kako je $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, $0 < 1-u < 1$ i $bS = \frac{s}{2}(1+C) < s$, dobivamo $\frac{s}{2} < s - \frac{bS}{2} \leq x_P \leq s$, pa $x_P \in [0, s]$. Za drugi kraj,

$$x_Q = x_B - (1-p)u \Delta x = s + bS[1-p-(1-p)u],$$

pa je $x_Q - s = bS(1-p)(1-u) > 0$ i $2s - x_Q = s - bS(1-p)(1-u) > s - bS = \frac{s}{2}(1-C) > 0$. Dakle $x_Q \in (s, 2s)$, i Lema 8.3 se primjenjuje. $\square$

Napomena A.8. Dokaz dijela (ii) pokazuje da *nikakva donja granica za k nije potrebna*: put je izvediv za svaki $k > 0$, svaki $p \in [0, \frac{1}{2}]$ i svaki neparni $n \geq 3$.

A.5 Klasifikacija svih p -neovisnih puteva

Lema A.9. *Neka je n neparan i $n \mid i+j$. Tada je $\theta = i\beta$ određen brojem $m = j-i$:*

$$\theta \equiv \begin{cases} \pi - \frac{m\pi}{n} \pmod{2\pi}, & m \text{ neparan}, \\ -\frac{m\pi}{n} \pmod{2\pi}, & m \text{ paran}. \end{cases}$$

Posljedično, d_{ij} ovisi samo o m . Nadalje, parovi (i, j) i $(i+n, j+n)$ daju isti put na prizmi.

Dokaz. Iz $i+j = Mn$ i $j-i = m$ dobivamo $2i \equiv -m \pmod{n}$; kako je n neparan, 2 je invertibilan modulo n uz $2^{-1} \equiv \frac{n+1}{2}$, pa je $i \equiv -m \frac{n+1}{2}$ i

$$\theta = \frac{2\pi i}{n} \equiv -\frac{m\pi(n+1)}{n} = -m\pi - \frac{m\pi}{n} \pmod{2\pi},$$

odakle dva slučaja. Duljina ovisi samo o θ i m prema (37), dakle samo o m . Konačno, $A_{i+n} = A_i + (ns, 0)$ i $B_{j+n} = B_j + (ns, 0)$, a translacija za $(ns, 0)$ je transformacija natkrivanja razvoja plašta, pa inducira identitetu na prizmi. $\square$

Napomena A.10 (Namotaji). Slijedi da su klase indeksirane brojem m , a ne brojem $M = (i+j)/n$: prijelaz s (i, j) na $(i+n, j+n)$ ostavlja m , a time i Δx i broj namotaja, nepromijenjenima. Putevi s $|m| \geq n$ običu prizmu barem jednom i mogu imati samopresjeke na plohi; ni jedno ni drugo ne utječe na duljinu ni na Lemu 8.3.

Teorem A.11 (Duljina klase m). *Neka je n neparan, $m \in \mathbb{Z}$, i pišimo $S_m = \sin(m\varphi)$, $C_m = \cos(m\varphi)$. Tada je $d_m = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ uz*

$$\begin{aligned} m \text{ neparan} : \quad & \Delta x = 2b\tau(m - \tau S_m C_m), \quad \Delta y = D - 2b\tau^2 C_m^2, \\ m \text{ paran} : \quad & \Delta x = 2b\tau(m + \tau S_m C_m), \quad \Delta y = D - 2b\tau^2 S_m^2. \end{aligned}$$

Klase m i $-m$ imaju jednake duljine.

Dokaz. Uvrstimo θ iz Leme A.9 u (37), koristeći $s = 2b\tau$, $\varepsilon = b\tau^2$, $\sin(m\pi/n) = 2S_m C_m$, $1 + \cos(m\pi/n) = 2C_m^2$ i $1 - \cos(m\pi/n) = 2S_m^2$. Zamjena m s $-m$ mijenja predznak od Δx , a ostavlja Δy . $\square$

A.6 Koje su klase kraće od D

Teorem A.12 (Prag k^*). *Pišimo $\Delta y = D - w$ uz $w \geq 0$ kao u Teoremu A.11. Tada je*

$$d_m < D \iff w > 0 \text{ i } k > k^*(m, n),$$

gdje je

$$k^*(m, n) = \begin{cases} \frac{(m - \tau S_m C_m)^2}{C_m^2} + \tau^2 C_m^2 - 1, & m \text{ neparan, } C_m \neq 0, \\ \frac{(m + \tau S_m C_m)^2}{S_m^2} + \tau^2 S_m^2 - 1, & m \text{ paran, } S_m \neq 0. \end{cases} \quad (39)$$

Pritom je $w = 0$ ako i samo ako $n \mid m$, a u tom je slučaju $\Delta x = ms$, $\Delta y = D$ i

$$d_m = \sqrt{(ms)^2 + D^2} \geq D \quad \text{za svaki } k > 0, \quad (40)$$

uz jednakost ako i samo ako $m = 0$.

Dokaz. Uz $0 \leq w < D$,

$$d_m^2 < D^2 \iff \Delta x^2 < D^2 - (D - w)^2 = w(2D - w) \iff \Delta x^2 + w^2 < 2Dw.$$

Za $w = 0$ desna je strana 0, pa nejednakost ne može vrijediti; tada je $d_m \geq D$.

Odredimo kada je $w = 0$. Za neparan m je $w = 2b\tau^2 C_m^2$, što iščezava točno kad je $\cos(m\varphi) = 0$, tj. $m \equiv n \pmod{2n}$ (neparan višekratnik od n); za paran m je $w = 2b\tau^2 S_m^2$, što iščezava točno kad je $\sin(m\varphi) = 0$, tj. $2n \mid m$. Unija tih dvaju skupova su točno svi višekratnici od n . U tom je slučaju $m\pi/n$ višekratnik od π , pa je $\sin \theta = 0$ i $\Delta x = ms$, a $\Delta y = D - w = D$; odatle (40).

Za $w > 0$, dijeljenjem s $2w$ dobivamo $D > \frac{\Delta x^2 + w^2}{2w}$, a kako je $D = b(k + 1)$, to je $k > \frac{\Delta x^2 + w^2}{2bw} - 1$. Uvrštavanjem izraza iz Teorema A.11, za neparan m ,

$$\frac{\Delta x^2 + w^2}{2bw} = \frac{4b^2\tau^2(m - \tau S_m C_m)^2 + 4b^2\tau^4 C_m^4}{4b^2\tau^2 C_m^2} = \frac{(m - \tau S_m C_m)^2}{C_m^2} + \tau^2 C_m^2,$$

i analogno za paran m . □

Korolar A.13 (Slučaj $m = 1$). $k^*(1, n) = 0$ za svaki neparni $n \geq 3$.

Dokaz. Uz $S_1 = \sin \varphi$, $C_1 = \cos \varphi$, $\tau = \tan \varphi$ imamo $\tau S_1 C_1 = \sin^2 \varphi$, pa je $1 - \tau S_1 C_1 = \cos^2 \varphi = C_1^2$ i

$$k^*(1, n) + 1 = \frac{(C_1^2)^2}{C_1^2} + \tau^2 C_1^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \quad \square$$

Korolar A.13 neovisan je dokaz dijela (iv) Teorema A.7.

A.7 Jedinstvenost

Teorem A.14 (Uvjetna jedinstvenost). *Neka je $n \geq 3$ neparan i stavimo $k^*(n) = \min_{m \geq 2} k^*(m, n)$. Za $0 < k < k^*(n)$ klase $m = \pm 1$ daju jedini p -neovisan put strogo kraći od D ; za $k > k^*(n)$ postoji barem još jedna takva klasa. Nadalje,*

$$k^*(m, n) \geq 6 \quad \text{za sve } m \geq 2,$$

uz jednakost ako i samo ako je $(n, m) = (3, 2)$. Posebno je $k^*(n) \geq 6$ za svaki neparni n , pa jedinstvenost vrijedi bezuvjetno za $0 < k < 6$.

Dokaz. Prve dvije tvrdnje slijede iz Teorema A.12, Korolara A.13 i Leme A.9, zajedno s $d_m = d_{-m}$ i $d_0 = D$.

Za ocjenu neka je $m \geq 2$ i $n \nmid m$ (inače je $w = 0$ i klasa nikad nije kraća, prema (40)). Iz

$$\tau S_m C_m = \frac{\tau}{2} \sin \frac{m\pi}{n} \implies |\tau S_m C_m| \leq \frac{\tau}{2}, \quad \tau = \tan \frac{\pi}{2n} \leq \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 0,5774,$$

razlikujemo tri slučaja.

(1) m neparan, dakle $m \geq 3$. Zbog $C_m^2 \leq 1$ i $m - \tau S_m C_m \geq m - \frac{\tau}{2} > 0$ je

$$k^*(m, n) + 1 \geq \left(m - \frac{\tau}{2}\right)^2 \geq (3 - 0,2887)^2 > 7,35.$$

(2) m paran, $m \geq 4$. Jednako, uz $S_m^2 \leq 1$,

$$k^*(m, n) + 1 \geq \left(m - \frac{\tau}{2}\right)^2 \geq (4 - 0,2887)^2 > 13,7.$$

(3) $m = 2$. Ovdje gruba ocjena nije dovoljna i treba točan račun. Stavimo $u := \cos \frac{\pi}{n}$; za neparni $n \geq 3$ je $u \in [\frac{1}{2}, 1)$, uz $u = \frac{1}{2}$ točno za $n = 3$. Uz $\varphi = \pi/2n$ imamo $S_2 = \sin 2\varphi$, $C_2 = \cos 2\varphi = u$, $S_2^2 = 1 - u^2$, te

$$\tau S_2 C_2 = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi = 2 \sin^2 \varphi \cdot u = (1 - u)u, \quad \tau^2 S_2^2 = \frac{1 - u}{1 + u} (1 - u^2) = (1 - u)^2.$$

Stoga je

$$k^*(2, n) + 1 = \frac{(2 + u - u^2)^2}{1 - u^2} + (1 - u)^2.$$

Tvrdimo da je to ≥ 7 . Množenjem s $1 - u^2 > 0$ tvrdnja je ekvivalentna s

$$(2 + u - u^2)^2 + (1 - u)^2(1 - u^2) \geq 7(1 - u^2).$$

Lijeva strana iznosi $(u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 4) + (1 - 2u + 2u^3 - u^4) = -3u^2 + 2u + 5$, pa tvrdnja postaje

$$-3u^2 + 2u + 5 \geq 7 - 7u^2 \iff 4u^2 + 2u - 2 \geq 0 \iff (2u - 1)(u + 1) \geq 0,$$

što vrijedi točno za $u \geq \frac{1}{2}$, uz jednakost samo pri $u = \frac{1}{2}$. Dakle $k^*(2, n) \geq 6$, uz jednakost ako i samo ako je $n = 3$.

U sva tri slučaja $k^*(m, n) \geq 6$, a jednakost nastupa jedino u slučaju (3) uz $n = 3$, tj. za $(n, m) = (3, 2)$. Konačno, minimum se postiže, jer $k^*(m, n) \rightarrow \infty$ kad $m \rightarrow \infty$. $\square$

Napomena A.15 (Točne vrijednosti). Formula (39) izravno je izračunljiva:

n	3	5	7	9	11	15	101
$k^*(n)$	6	12,472	12,684	10,420	9,504	8,756	8,016
postiže se za	$m = 2$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 3$	$m = 3$	$m = 3$	$m = 3$

Vrijednost $k^*(3) = 6$ je egzaktna. Grana $m = 2$ raste s n ; grana $m = 3$ pada, s graničnom vrijednošću

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^*(3, n) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[\frac{(3 - \tau S_3 C_3)^2}{C_3^2} + \tau^2 C_3^2 - 1 \right] = 9 - 1 = 8,$$

jer $\tau \rightarrow 0$ i $C_3 = \cos 3\varphi \rightarrow 1$.

Primjer A.16 (Jedinstvenost pada za velike k). Za $n = 5$ i $m = 3$ — na primjer par $(i, j) = (1, 4)$, koji nije spiralan jer je $i + j = n$ — formula (39) daje $k^*(3, 5) = 22,4721 \dots$ Za $k > k^*(3, 5)$ taj je put p -neovisan i strogo kraći od D ; provjera Lemom 8.3 pokazuje da je i geometrijski izvediv za $k > 26,1335 \dots$ Pri $b = 1$, $k = 31$, $p = 0,25$,

$$d_1 = 31,81445 \dots, \quad d_3 = 31,98055 \dots, \quad D = 32,$$

dakle postoje dva različita, izvediva, nespiralna p -neovisna puta kraća od očitog. Tvrdnja oblika “postoji točno jedan takav put” stoga je netočna bez ograničenja na k ; ispravna je Teorem A.14. Za $n = 3$ i $m = 2$ drugi se put pojavljuje već pri $k > 6$.

A.8 Glavni rezultat

Teorem A.17 (H1). *Neka je $n \geq 3$ i $k > 0$.*

- (a) *Ako je n neparan, pravilna n -prizma nosi p -neovisan, geometrijski izvediv, nespiralan put koji je za svaki $p \in [0, \frac{1}{2}]$ strogo kraći od $D = b(k+1)$. Njegova je duljina*

$$d = b\sqrt{k^2 + 2k \cos \frac{\pi}{n} + 1},$$

a ostvaruje ga par indeksa $(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ i njemu zrcalni.

- (b) *Ako je n paran, nijedan p -neovisan put — ni spiralan — nije kraći od očitog puta; svaki ima duljinu $\sqrt{(ms)^2 + D^2} \geq D$.*

- (c) *Za $0 < k < k^*(n)$, gdje je $k^*(n) \geq 6$, put iz (a) je jedini p -neovisan put kraći od očitog.*

Dokaz. (a) je Teorem A.7; (b) je Teorem A.6; (c) je Teorem A.14. □

Napomena A.18 (Zašto neparne prizme). Jednadžba (37) pokazuje da je jedina razlika između parnog i neparnog slučaja parametar $\varepsilon = b - 2r$. Za parni n simetrala spaja polovišta dviju suprotnih stranica, obje na udaljenosti r od središta, pa je $\varepsilon = 0$; tada je $\Delta y = D$ za *svaki* p -neovisan par i skraćanje je nemoguće. Za neparni n simetrala spaja vrh (na udaljenosti R) s polovištem suprotne stranice (na udaljenosti r), pa je $\varepsilon = R - r > 0$; upravo ta asimetrija skida $\varepsilon(1 - \cos \theta)$ s okomite komponente i omogućuje $d < D$. H1 je izravna posljedica činjenice da pravilni n -terokut ima simetralu vrh–stranica točno onda kad je n neparan.

B H2: opovrgnuta, osim u jednoj točki

H2 tvrdi da broj kraćih puteva raste neograničeno kad n raste dok k ostaje ograničen, bez spiralnih puteva. Pokazujemo da je za svaki fiksni $k \neq 1$ broj klasa ograničen — saturira oko $n \approx 100$ i dalje se ne mijenja. H2 je dakle netočna. Iznimka je jedina vrijednost $k = 1$, i to za svaki p : tamo broj raste neograničeno, otprilike kao $\sqrt{n}$.

B.1 Numerička slika

Broj klasa kraćih puteva, brojeno egzaktnim kriterijem iz Leme 8.3 po parovima $0 \leq i, j \leq n$, uz $p = 0,25$:

n	$k = 0,9$	$k = 1,0$	$k = 1,1$	$k = 1,5$	$k = 2$	$k = 3,5$	$k = 5$
201	7	257	115	33	21	12	9
801	7	407	114	29	20	10	9
1601	7	589	112	30	19	11	10
3201	7	849	109	29	19	11	9

Svaki je stupac ravan osim $k = 1$, koji i dalje raste. (Klase se tvore grupiranjem duljina koje se podudaraju do na fiksnu toleranciju; pri ovim vrijednostima n mnoge se klase razlikuju tek u desetoj decimali ili dalje, pa su pojedinačni unosi — za razliku od same saturacije — blago osjetljivi na tu toleranciju.)

B.2 Zašto saturira

Uzmimo $b = 1$, $\beta = 2\pi/n$, $x = i\beta$, $y = j\beta$, $w = \frac{1}{2} - p > 0$. Kad $n \rightarrow \infty$ je $\sigma \rightarrow 0$ i $\rho \rightarrow \frac{1}{2}$, pa komponente iz Teorema 8.1 postaju

$$\Delta x \rightarrow \frac{y-x}{2} - w(\sin x + \sin y), \quad \Delta y \rightarrow (k+1) - w(\cos y - \cos x).$$

Kriterij izvedivosti traži da dva probodišta padnu unutar dodirnih stranica, čija je širina $\sigma = O(1/n)$. Oba uvjeta zato u limesu postaju *jednakosti*:

$$E_1 : (y-x)(1-w(\cos y - \cos x)) + 2kw(\sin x + \sin y) = 0, \quad (41)$$

$$E_2 : \frac{1}{2}(\sin y - \sin x) + w \sin(x+y) = 0. \quad (42)$$

Dvije jednadžbe s dvije nepoznanice imaju izolirana rješenja. Rešetka $(i\beta, j\beta)$ ima korak $\beta = 2\pi/n$, a tolerancija je $O(\sigma) = O(1/n)$ — istog reda — pa oko svakog rješenja stane $O(1)$ točaka rešetke. Ukupan je broj stoga **ograničen**, neovisno o n .

Predikcija se može provjeriti izravno: pri $n = 1601$, $k = 3,5$, $p = 0,25$ svih 22 izvedivih kraćih puteva zadovoljava $|E_1|, |E_2| < 0,01 \approx \beta$, i grupiraju se oko tri izolirana rješenja.

B.3 Zašto je $k = 1$ drukčiji

Točke $(0,0)$ i (π, π) uvijek su rješenja sustava. Jakobijan u njima je

$$\det J \Big|_{(0,0)} = \det J \Big|_{(\pi,\pi)} = -(k-1)(2p-1).$$

Za $k \neq 1$ (i $p \neq \frac{1}{2}$) presjek je transverzalan: izolirana točka s $O(1)$ točaka rešetke u blizini. Pri $k = 1$ determinanta iščezava i dvije krivulje $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ postaju *tangencijalne*. Područje u kojem oba uvjeta vrijede do na $\varepsilon = O(1/n)$ tada nije mrlja veličine $\varepsilon \times \varepsilon$, nego luk duljine $\sim \sqrt{\varepsilon}$ i širine $\sim \varepsilon$, koji sadrži

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\beta} \sim \sqrt{n}$$

točaka rešetke.

Uvjet $k = 1$ ne uključuje p , što mjerenja potvrđuju: pri $p = 0,1, 0,25$ i $0,4$ rast nastupa točno pri $k = 1$. Pri $k = 1$, $p = 0,25$ brojevi su 257, 313, 407, 589, 849 za $n = 201, 401, 801, 1601, 3201$, uz lokalni eksponent koji raste prema 0,53 — u skladu sa $\sqrt{n}$.

Vrijednosti blizu, ali ne jednake 1, ipak saturiraju, premda sporo: pri $p = 0,4$, $k = 1,05$ broj raste do 2034 pri $n = 1601$, a zatim pada na 1896 pri $n = 3201$; pri $k = 1,2$ pada postojano, $574 \rightarrow 560 \rightarrow 521 \rightarrow 502$.

B.4 Zaključak

- **H2 je netočna** u obliku u kojem je postavljena: za tipičan fiksni k broj nespiralnih kraćih puteva ne raste neograničeno, nego saturira na konstantu — 19 za $k = 2$, 11 za $k = 3,5$, 9 za $k = 5$ (uz $p = 0,25$).
- **Vrijedi točno pri $k = 1$** , za svaki $p \in [0, \frac{1}{2})$, gdje broj raste otprilike kao $\sqrt{n}$.
- Ispravna bi formulacija glasila: *broj nespiralnih kraćih puteva ograničen je za svaki $k \neq 1$; pri $k = 1$ raste neograničeno.*

Ograda. Degeneracija je analitički pokazana samo u $(0,0)$ i (π, π) . Nije isključeno da neko drugo rješenje sustava postane tangencijalno pri nekom drugom k , što bi dalo još koju iznimnu vrijednost. Pretraga po $k \in [0,8; 8]$ i $p \in \{0,1; 0,25; 0,4\}$ nije našla nijednu: svugdje osim pri $k = 1$ broj saturira.

C H3: potvrđena, uz zakon rasta

H3 tvrdi da za fiksni n broj kraćih puteva raste neograničeno kad $k \rightarrow \infty$, ali samo ako su dopušteni spiralni putevi. Obje su polovice točne. Uz to, rast se pokazuje jednakim $C(n, p)\sqrt{k}$ s eksplicitnom konstantom.

C.1 Struktura

Uz $b = 1$, $u = p - \rho$, $v = p - 1 + \rho$ i $m = j - i$, Teorem 8.1 daje

$$\Delta x = m\sigma + X, \quad \Delta y = k + Y,$$

$$X = u \sin(c\beta) + v \sin(a\beta), \quad Y = 2\rho + u \cos(c\beta) - v \cos(a\beta),$$

gdje je $a = i \bmod n$ i $c = j \bmod n$. Bitno je da X i Y ovise *samo* o ostacima a, c , dok m ulazi jedino linearno, u Δx . Spiralni su putevi upravo oni s velikim $|m|$, a za njih su X i Y nepromijenjeni.

C.2 Koliko ih je kraće od očitog puta

Iz $d < D = k + 1$ slijedi

$$(m\sigma + X)^2 < (1 - Y)(2k + 1 + Y),$$

pa je $Y < 1$ nužno. Uz to, dopušteni m tvore interval duljine

$$\frac{2\sqrt{(1 - Y)(2k + 1 + Y)}}{\sigma} \approx \frac{2\sqrt{2k(1 - Y)}}{\sigma},$$

koja **raste kao** $\sqrt{k}$. Upravo tu je bitno ograničenje o spiralnim putevima: ako je $|m| \leq n$, interval je odrezan i ništa ne raste.

Uvjet $Y < 1$ pojednostavljuje se neočekivano. Pišući $A = 1 - \cos(a\beta)$ i $C = 1 - \cos(c\beta)$, izravan račun daje $Y - 1 = (\rho - p)C - (1 - \rho - p)A$, pa

$$(\rho - p)(1 - \cos(c\beta)) < (1 - \rho - p)(1 - \cos(a\beta)). \quad (43)$$

Za parni n je $\rho = \frac{1}{2}$ i to se svodi na $\cos(c\beta) > \cos(a\beta)$. Za $a = 0$ desna strana iščezava, pa takav put nikad nije kraći — to je obitelj očitih puteva.

C.3 Izvedivost kad $k \rightarrow \infty$

Egzaktni kriterij daje

$$x_P = \frac{\sigma}{2} - v \sin(a\beta) + \frac{\alpha}{\Delta y} \Delta x, \quad x_Q - m\sigma = \frac{\sigma}{2} + u \sin(c\beta) - \frac{\gamma}{\Delta y} \Delta x.$$

Kako je $\Delta x = O(\sqrt{k})$ a $\Delta y = O(k)$, popravci su $O(1/\sqrt{k})$ i iščezavaju. U limesu izvedivost postaje uvjet samo na ostatke:

$$0 \leq \frac{\sigma}{2} - v \sin(a\beta) \leq \sigma, \quad 0 \leq \frac{\sigma}{2} + u \sin(c\beta) \leq \sigma. \quad (44)$$

To je odlučujuća razlika prema Dodatku B. Ondje n raste, $\sigma \sim 1/n$ se steže, i uvjeti se stisnu u jednadžbe. Ovdje je n fiksni, σ se ne steže, i uvjeti ostaju nejednadžbe.

C.4 Zakon rasta

Za dopušteni par (a, c) samo svaki n -ti m ima traženi ostatak, jer je $m \equiv c - a \pmod{n}$. Stoga:

Teorem C.1. *Za fiksne n i p , broj kraćih puteva uz dopuštene spiralne puteve zadovoljava*

$$\#\{\text{putevi}\} \sim C(n, p)\sqrt{k}, \quad C(n, p) = \frac{2}{n\sigma} \sum_{(a, c) \text{ dopušteni}} \sqrt{2(1 - Y(a, c))},$$

pri čemu suma ide po parovima ostataka koji zadovoljavaju (43) i (44). Broj klasa je upola manji.

n	C (teorija)	C pri $k = 10^4$	C pri $k = 5 \cdot 10^4$	odstupanje
3	3,6004	3,5800	3,5956	0,13 %
4	1,9142	1,9000	1,9141	0,01 %
5	6,7806	6,7800	6,7798	0,01 %
6	5,3650	5,3600	5,3845	0,36 %
7	7,5867	7,5400	7,6116	0,33 %
8	5,7880	5,7800	5,7869	0,02 %
9	5,3210	5,2800	5,3308	0,18 %

C.5 Mjerenja

Broj klasa, spiralni putevi dopušteni, $p = 0,25$:

k	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
5	4	2	9	4	12
20	9	3	13	7	12
100	18	7	35	17	32
500	40	14	76	38	82
2 000	80	27	151	75	170
10 000	179	60	339	169	377

Isto, **bez** spiralnih puteva ($0 \leq i, j \leq n$):

k	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
10	4	2	8	5	11
100	4	3	10	7	10
1 000	4	3	10	7	12
10 000	4	3	10	7	12
100 000	4	3	10	7	12

C.6 Zaključak

- **H3 je točna.** Uz dopuštene spiralne puteve broj kraćih puteva raste neograničeno, za svaki $n \geq 3$.
- Rast je asimptotski $C(n, p)\sqrt{k}$, s konstantom iz Teorema C.1.
- Ograničenje na spiralne puteve je bitno, i to iz jasnog razloga: ušteda dolazi od intervala dopuštenih m čija duljina raste kao $\sqrt{k}$. Ograniči li se $|m|$ na n , broj saturira, kako pokazuje druga tablica.