

*Mrav i med
na pravilnim prizmama i valjku
(verzija 4)*

Zlatko Sirotić, univ.spec.inf.

ISTRA TECH d.o.o.

Pula, kolovoz 2025.

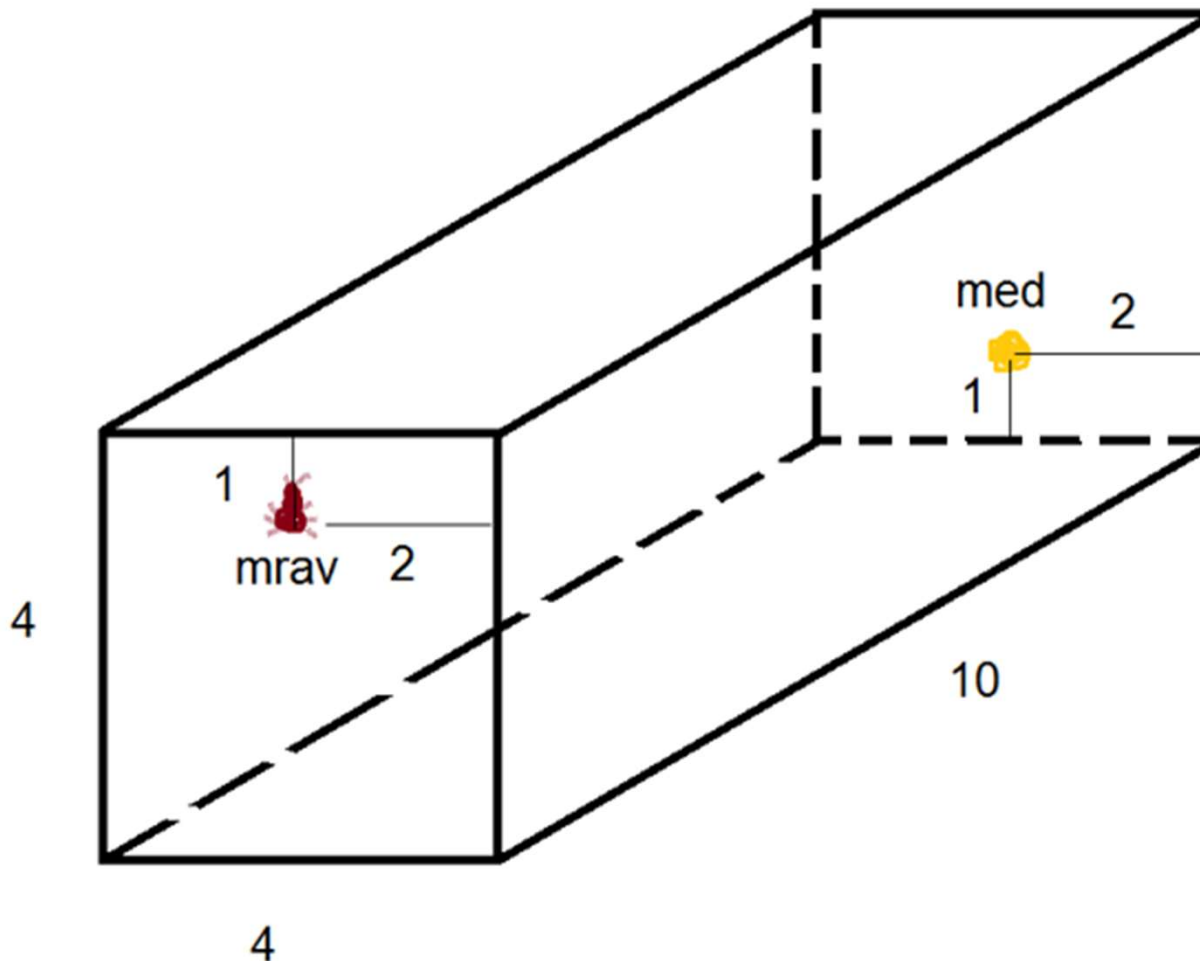
(2015. v0, 2020. v1, 2021. v2, 2023. v3)

Uvod

- Zadatak s (kvadratnom) prizmom mi je 1981. godine dao prijatelj Korado Korlević.
- Riješio sam ga za par sati.
No odmah sam si postavio pitanje:
"Što ako bi bio valjak, a ne prizma?" (sa istim postavkama).
- Tada sam bio intuitivno uvjeren da kraći put na valjku ne postoji. A i mislio sam da za rješenje treba složena matematika, npr. račun varijacija.
- Vratio sam se tome 2013. godine i našao da i na valjku postoji kraći put.
- **No poslije sam se vratio na zadatak s prizmom, i vidio da i taj jednostavniji zadatak krije još zanimljivih "matematičkih tajni".**

Mrav i med na čtverostranoj pravilnoj prizmi (kvadratnoj prizmi)

- Postoji li kraći put (po površini prizme) između mrava i kapljice meda od **"očitog puta"**, koji ima duljinu $4 + 10 = 14$ (stranica $a = 4$, visina $h = 10$)?



Mrav i med na četverostranoj prizmi

- Rješenje, tj. put kraći od 14, se jednostavno nađe **prikazom prizme u ravnini**, a onda se gornji i donji kvadrat rotiraju po plaštu u koracima po 90 stupnjeva.
- Od 4 položaja gornjeg kvadrata i 4 donjeg kvadrata, jedna kombinacija (koja se dobije rotacijom jednog kvadrata **za 90 stupnjeva**) daje put koji je kraći od 14. Zapravo, uvijek postoje barem dva jednaka puta (jer je svejedno da li se krene desno ili lijevo), a istovjetni su i putevi prema gore i dolje, pa imamo četiri jednaka puta.
- S **D** označimo udaljenost kod **očitog puta**, a s **d** udaljenost kod **kosog puta** (koji je kraći od očitog). U našem slučaju:
$$d = \sqrt{(10 + 3)^2 + 5^2} = \sqrt{194} < \sqrt{196} = 14 = D$$
d < D
- To (još) nije matematički dokaz da je to minimalni put, iako to zaista jeste minimalni put (može se lako dokazati da kraći put ne može prolaziti kroz jedan, ili oba vrha prizme).

Mrav i med na četverostranoj prizmi

□ **No zadatak možemo promatrati i općenito.**

□ Kvadratna prizma ima stranicu **a** i visinu **h**.

Dakle, očiti put između mrava i kapljice meda jednak je:

$$D = a + h$$

□ Na jednoj bazi prizme (tj. kvadratu) nalazi se mrav (držimo da mrav nema dimenzija, kao da je točka). Mrav se po horizontali nalazi na sredini, a po vertikali bilo gdje (pa i na rubu baze).

□ Na suprotnoj bazi nalazi se kapljica meda (također, kao da je točka). Kapljica meda se po horizontali isto nalazi na sredini, a po vertikali tako da bude udaljena od svog donjeg ruba onoliko koliko je mrav udaljen od svog gornjeg ruba.

□ **Postoji li kraći put u općenitom slučaju?**

□ U analizi problema koristit ćemo (opet) Pitagorin poučak, kvadratnu jednadžbu, osnove trigonometrije i malo deriviranja (za nalaženje minimuma / maksimuma nekih funkcija).

Mrav i med na četverostranoj prizmi

- Promatrajmo prvo slučaj kad su mrav i med na rubu **prizme**. Vidjet ćemo kasnije da je najkraći kosi put upravo onaj kad mrav polazi sa ruba.
- Označimo s **d0** udaljenost **kosog puta koji polazi od ruba**. Da bi postojao kosi put koji je kraći od očitog puta, mora biti:

$$d0 < D = (h + a)$$

$$d0^2 < h^2 + 2 a h + a^2$$

- Najkraći put **d0** nađe se kada se jedan kvadrat rotira **za 180 stupnjeva (a ne 90, kao prije)**, i tada vrijedi:

$$d0^2 = h^2 + (2 a)^2$$

$$d0^2 = h^2 + 4 a^2$$

- Dakle:

$$h^2 + 4 a^2 < h^2 + 2 a h + a^2$$

$$h > 3/2 a$$

Mrav i med na četverostranoj prizmi

- Do koje točke se može mrav udaljavati od ruba, a da kosi put i dalje bude kraći od očitog puta?
- Udaljenost mrava od npr. gornjeg ruba može se prikazati kao **proporcija od a**, tj. kao **p a**, pri čemu je $0 \leq p < 0,5$.
- Udaljenost kapljice meda od gornjeg ruba tada je **(1 - p) a**.
- **p_max** je **maksimalni p** kod kojeg postoji put kraći ili jednak očitom putu:

$$p \leq p_{\max}$$

- Uvedimo **k** kao odnos između h i a, tj.:

$$h = k a \text{ ili } k = h / a$$

- Može se računati počevši od sljedeće postavke

$$d \leq D = (h + a)$$

$$d^2 \leq (h + a)^2 = (k a + a)^2 = a^2 (k + 1)^2$$

- Naravno, treba naći formulu za d.

Mrav i med na četverostranoj prizmi

□ Dva kraća puta

(odnosno, dvije klase puteva iste duljine)

za postavke:

visina prizme $h = 14$

visina baze $a = 4$

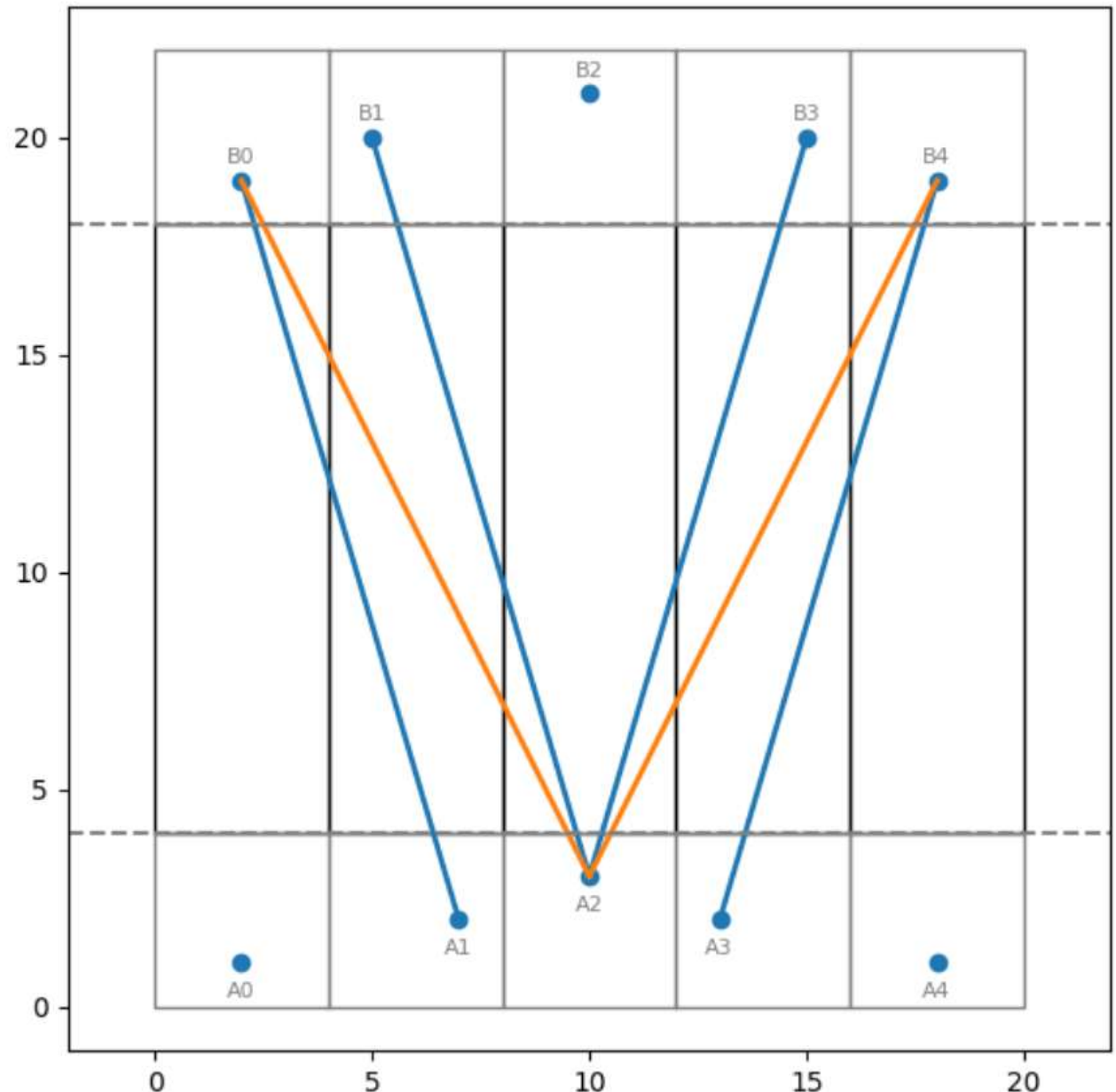
(tj. $k = 3,5$)

$p = 0,25$

□ **Plavi** (npr. A2–B3),
u tekstu **d1**, je kraći
za gornje postavke

□ **Narančasti** (A2-B4),
u tekstu **d2**, je dulji
(za npr. $p = 0$ je kraći)

□ **Pravokutnika je $n+1$,**
ali prvi i zadnji su isti; tako se dobije simetričan prikaz puteva⁸



Mrav i med na četverostranoj prizmi

- Kod prvobitnog zadatka, najkraći put bio je onaj kod kojeg se kvadrat rotirao jedanput, a kod puta koji polazi sa ruba, najkraći put se dobio rotiranjem kvadrata dvaput.
- **Za $2 \leq k \leq 5$ postoje maksimalno (ovisi od p) 2 kraća puta** (npr. za $k = 10$ postoji i treći kraći put). Put d_2 je kraći od puta d_1 kad je p manji ili jednak varijabli **p_{eq}** (koja ovisi od k), a d_1 je kraći kada je p veće od p_{eq} i manje od **p_{max1}** .
- Kad je **$p_{eq} \leq p \leq p_{max1}$** , najkraći put dat je formulom:
$$d_1^2 = (a/2 + a(1 - p))^2 + (ap + ak + a/2)^2$$
$$d_1 = a \sqrt{k^2 + k + 2kp + 2p^2 - 2p + 5/2}$$
- Kad je **$p \leq p_{eq}$** , najkraći put (tj. udaljenost) dat je formulom:
$$d_2^2 = (a/2 + a + a/2)^2 + (ap + ak + ap)^2$$
$$d_2 = a \sqrt{k^2 + 4kp + 4p^2 + 4}$$

Mrav i med na četverostranoj prizmi

- Formulu za **p_eq**, tj. p kod kojeg su vrijednosti kod obje formule za minimalni put jednake, možemo naći ovako: za $p_{eq} \leq p \leq p_{max2}$ vrijedi

$$d1 = a \sqrt{k^2 + k + 2kp + 2p^2 - 2p + 5/2}$$

za $p \leq p_{eq}$ vrijedi

$$d2 = a \sqrt{k^2 + 4kp + 4p^2 + 4}$$

- Izjednačavanjem tih formula dobijemo:

$$k_{eq} = (p^2 + p + 3/4) / (1/2 - p)$$

- Alternativno, dobijemo:

$$2p^2 + 2(k + 1)p + 3/2 - k = 0$$

$$p_{eq} = 1/2 (\sqrt{k^2 + 4k - 2} - k - 1)$$

- Npr. za naš slučaj ($k = 3,5$), p_{eq} je 0,2122...

- **Za $p \leq p_{eq}$, kraći je put d2, a za $p \geq p_{eq}$ kraći je d1.**

Mrav i med na četverostranoj prizmi

- Formulu za **p_max1** dobijemo koristeći formulu d1, tj. onu za $p_{eq} \leq p \leq p_{max1}$:

$$d1^2 = a^2 (k^2 + k + 2kp + 2p^2 - 2p + 5/2)$$

- Iz postavke:

$$d1^2 \leq D^2 = a^2 (k + 1)^2$$

vrijedi:

$$2p^2 + 2(k - 1)p + 3/2 - k \leq 0$$

$$\mathbf{p_{max1} = 1/2 (\sqrt{k^2 - 2} - k + 1)}$$

- Npr. za naš slučaj ($k = 3,5$), p_{max1} je 0,3507...

Mrav i med na četverostranoj prizmi

□ Iako se nakon $p > p_{eq}$ primjenjuje formula $d1$, put $d2$ je još uvijek kraći od očitog puta D , sve do nekog **p_{max2}** . Naravno, taj put tada nije minimalni.

□ Za $p \leq p_{eq}$ vrijedi:

$$d2 = a \sqrt{k^2 + 4 k p + 4 p^2 + 4}$$

□ Iz postavke:

$$d2^2 \leq D^2 = a^2 (k + 1)^2$$

vrijedi:

$$a^2 (k^2 + 4 k p + 4 p^2 + 4) \leq a^2 (k + 1)^2$$

$$2 p^2 + 2 k p + 3/2 - k \leq 0$$

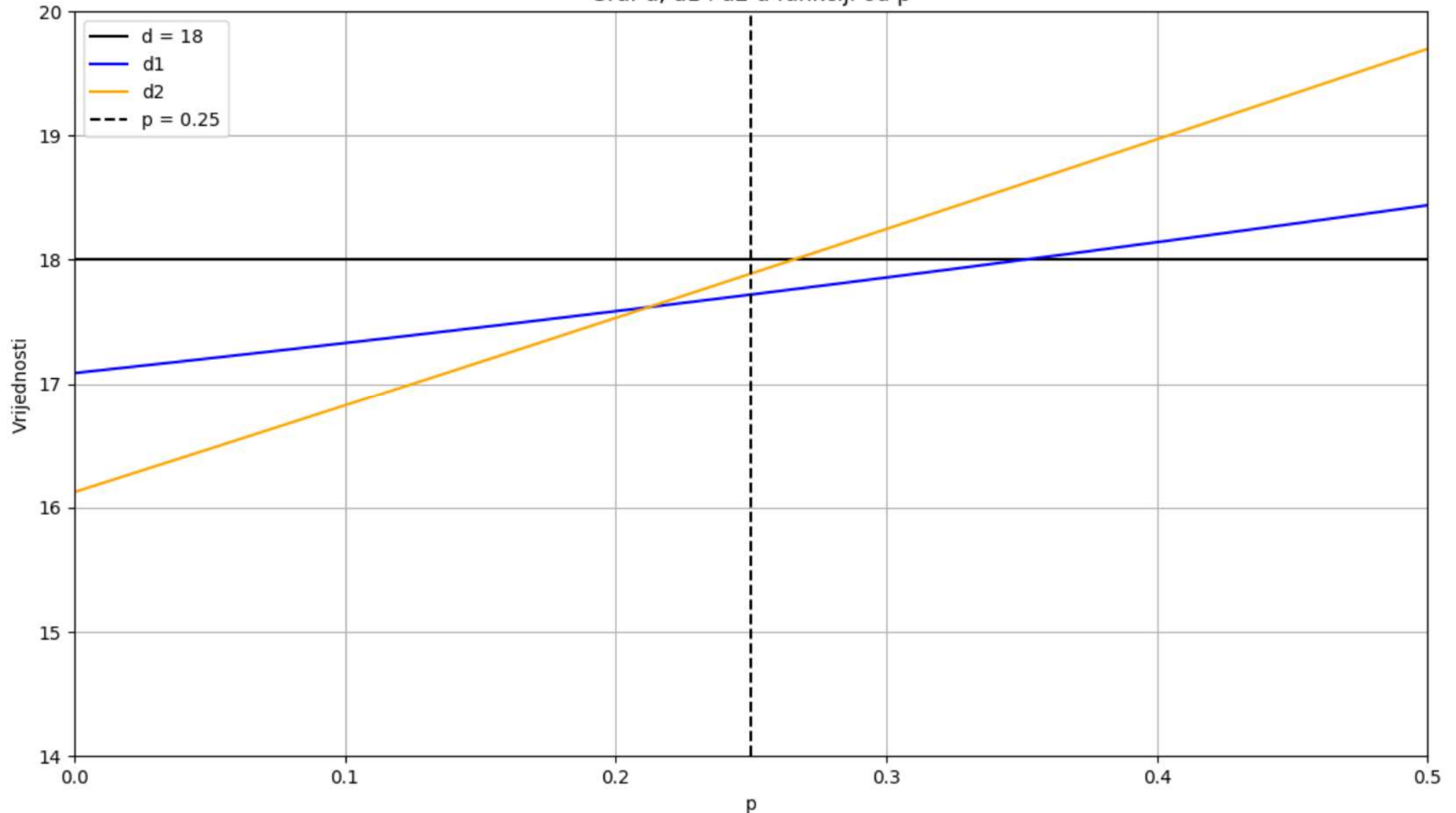
$$\mathbf{p_{max2} = 1/2 (\sqrt{k^2 + 2 k - 3} - k)}$$

□ Npr. za naš slučaj ($k = 3,5$), p_{max2} je 0,2655...

Mrav i med na četverostranoj prizmi

□ d_1 i d_2 , za bazu duljine 4 i $k = 3,5$

Graf d , d_1 i d_2 u funkciji od p



Mrav i med na četverostranoj prizmi

□ Zanimljivo je promatrati odnos kosog puta i očitog puta.

□ Kad je $p_{eq} \leq p \leq p_{max1}$, koristi se formula $d1$, pa je:

$$d1 / D = \sqrt{k^2 + k + 2kp + 2p^2 - 2p + 5/2} / (k + 1)$$

□ Da bi vrijedilo $d1 < D$, tj. $d1 / D < 1$, k mora biti:

$$k > (3/2 + 2p^2 - 2p) / (1 - 2p)$$

□ Kad je $p \leq p_{eq}$, koristi se formula $d2$, pa je:

$$d2 / D = \sqrt{k^2 + 4kp + 4p^2 + 4} / (k + 1)$$

□ Da bi vrijedilo $d2 < D$, tj. $d2 / D < 1$, k mora biti:

$$k > (3/2 + 2p^2) / (1 - 2p)$$

Mrav i med na četverostranoj prizmi

□ Na temelju prethodnih formula izvest ćemo (dvije) formule za **k_{opt}** (optimalni k , za zadani p),
tj. **k kod kojeg je skraćenje maksimalno.**

□ Kad je $p_{\text{eq}} \leq p \leq p_{\text{max2}}$ vrijedi:

$$d1 / D = \sqrt{k^2 + k + 2kp + 2p^2 - 2p + 5/2} / (k + 1)$$

□ **Derivacija po k je:**

$$((2p - 1)k + 4p^2 - 6p + 4)$$

$$/ (2(k + 1) \sqrt{k^2 + (1 + 2p)k + 2p(p - 1) + 5/2})$$

□ **Izjednačavanje brojnika derivacije s nulom daje:**

$$k_{\text{opt1}} = (2p^2 - 3p + 2) / (1/2 - p)$$

Mrav i med na četverostranoj prizmi

- Kad je $p \leq p_{eq}$ vrijedi:

$$d_2 / D = \sqrt{k^2 + 4 k p + 4 p^2 + 4} / (k + 1)$$

- **Derivacija po k je:**

$$\frac{((2 p - 1) k + 4 p^2 - 2 p + 4)}{((k + 1)^2 \sqrt{k^2 + 4 p k + 4 p^2 + 4})}$$

- **Izjednačavanje brojnika derivacije s nulom daje:**

$$k_{opt2} = (2 p^2 - p + 2) / (1/2 - p)$$

Mrav i med na četverostranoj prizmi

- Budući da imamo dvije formule za k_{opt} :

$$k_{\text{opt1}} = (2p^2 - 3p + 2) / (1/2 - p)$$

$$k_{\text{opt2}} = (2p^2 + p + 2) / (1/2 - p)$$

pitamo se: **kada koristiti prvu formulu, a kada drugu?**

- Prisjetimo se da smo se isto pitali kod dviju formula za minimalni put. Pa kod njihovog izjednačenja dobili i:

$$k_{\text{eq}} = (p^2 + p + 3/4) / (1/2 - p)$$

- Izjednačimo tu formulu s formulama za k_{opt1} i k_{opt2} .

- Izjednačavanje s k_{opt2} ne daje rješenje za p (odnosno, dobijemo kompleksne brojeve).

- Izjednačavanje s k_{opt1} daje:

$$p_{\text{opt}} = 2 - \sqrt{11}/2 = 0,3416\dots$$

- **Za $p \leq p_{\text{opt}}$ koristimo formulu k_{opt2} , a za $p \geq p_{\text{opt}}$ koristimo formulu k_{opt1} .**

Mrav i med na četverostranoj prizmi

□ **Kut** (u odnosu na horizontalu) **pod kojim mrav treba krenuti** prema kapljici meda može se izraziti kao funkcija od k i p .

□ Za put d_1 vrijedi:

$$\tan(\text{kut1}) = (a p + a k + a/2) / (a/2 + a (1 - p))$$

$$\text{kut1} = \arctan((2 k + 2 p + 1) / (3 - 2 p))$$

□ Za put d_2 vrijedi:

$$\tan(\text{kut2}) = (a p + a k + a p) / (a/2 + a + a/2)$$

$$\text{kut2} = \arctan((k + 2 p) / 2)$$

Mrav i med na četverostranoj prizmi

Rekapitulacija formula (za $2 \leq k \leq 5$):

$$D = a (k + 1)$$

$$k > 3/2 \quad (\text{uvjet za postojanje kraćeg puta})$$

$$d1 = a \sqrt{k^2 + k + 2 k p + 2 p^2 - 2 p + 5/2} \quad \mathbf{p \geq p_{eq}}$$

$$d2 = a \sqrt{k^2 + 4 k p + 4 p^2 + 4} \quad \mathbf{za \ p \leq \ p_{eq}}$$

$$p_{\max 1} = 1/2 (\sqrt{k^2 - 2} - k + 1)$$

$$p_{\max 2} = 1/2 (\sqrt{k^2 + 2 k - 3} - k)$$

$$p_{eq} = 1/2 (\sqrt{k^2 + 4 k - 2} - k - 1)$$

$$k_{opt1} = (2 p^2 - 3 p + 2) / (1/2 - p)$$

$$k_{opt2} = (2 p^2 - p + 2) / (1/2 - p)$$

$$p_{opt} = 2 - \sqrt{11}/2 = 0,3416...$$

$$kut1 = \arctan((2 k + 2 p + 1) / (3 - 2 p))$$

$$kut2 = \arctan((k + 2 p) / 2)$$

Mrav i med na trostranoj prizmi

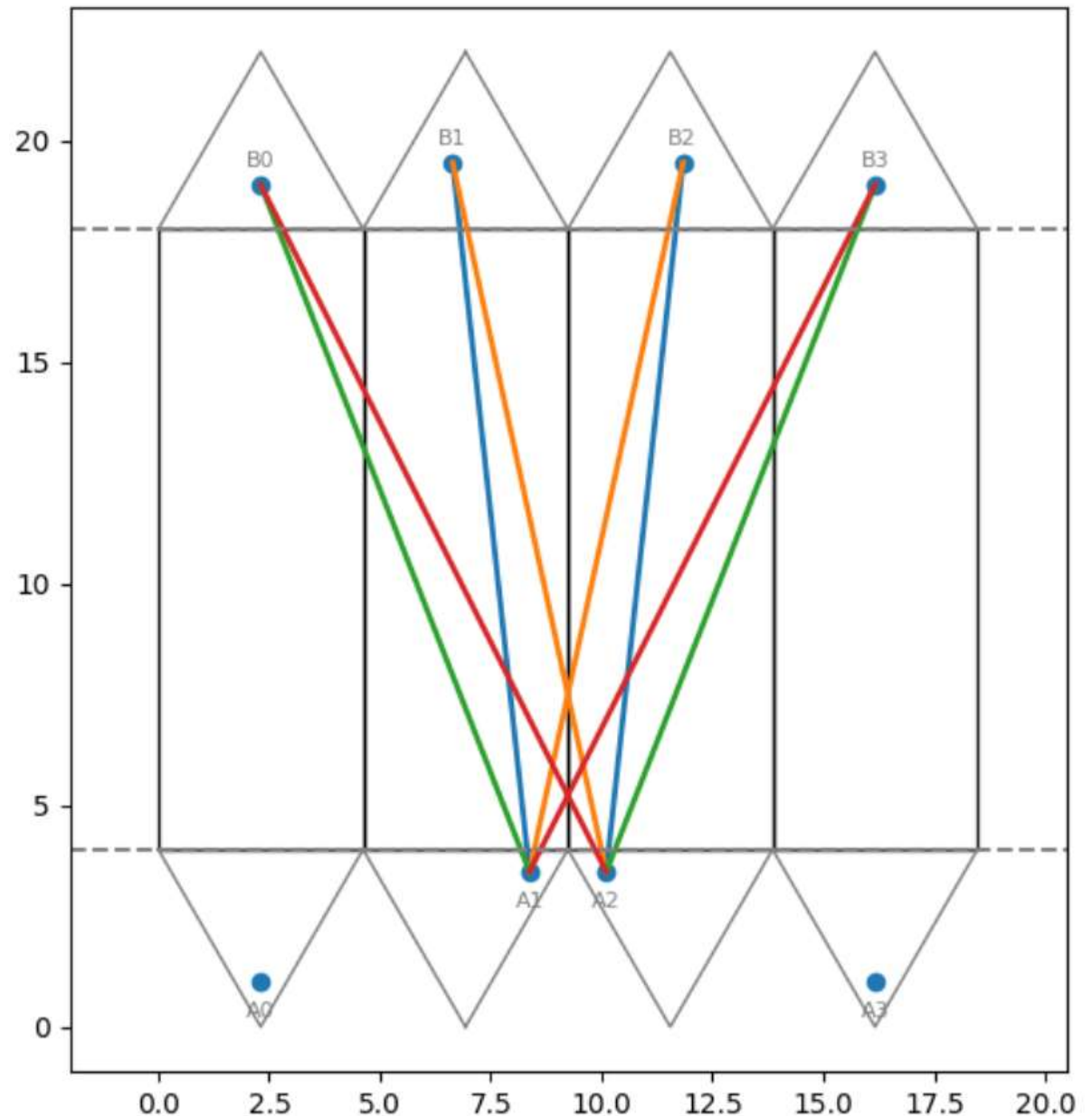
- Do sada smo promatrali prizmu čija je baza kvadrat (skraćeno: 4-prizma).
- Zanimljivo je analizirati prizmu čija je baza jednakostraničan trokut (3-prizma).
- Kod 3-prizme očiti put ima duljinu koja je zbroj visine prizme (h) i visine trokuta (v).
- Ako visinu 3-prizme prikažemo kao (stranica trokuta je a):
$$h = k \quad v = k \sqrt{3}/2 \quad a$$

dobijemo sljedeće:
$$D = h + v = k \sqrt{3}/2 \quad a + \sqrt{3}/2 \quad a$$

$$D = a \sqrt{3}/2 (k + 1)$$

Mrav i med na trostranoj prizmi

- ❑ Četiri kraća puta (odnosno, četiri klase) za postavke:
visina prizme $h = 14$
visina baze $v = 4$
 $p = 0,25$
- ❑ **Plavi** je najkraći, u tekstu **d1**
- ❑ **Narančasti** je dulji, u tekstu **d2**
- ❑ **Zeleni** je još dulji, u tekstu **d3**
- ❑ **Crveni** je najdulji, u tekstu **d4**



Mrav i med na trostranoj prizmi

□ Postoje maksimalno (ovisi od p) 4 puta kraća od očitog puta D (za $2 \leq k \leq 5$).

□ Duljina puta d_1 :

$$d_1^2 = (a(1/2 - p) \sqrt{3}/2)^2$$

$$+ (a p \sqrt{3}/4 + a k \sqrt{3}/2 + a(1 - p) \sqrt{3}/4)^2$$

$$d_1 = a \sqrt{3}/2 \sqrt{k^2 + k + 3p^2 - 3p + 1}$$

□ Put d_1 uvijek je kraći od D , za svaki $k > 0$ i $p \geq 0$.

Mrav i med na trostranoj prizmi

□ Duljina puta d_2 :

$$d_2^2 = (a p^{3/4} + a (1 - p)^{3/4})^2 \\ + (a p \sqrt{3}/4 + a k \sqrt{3}/2 + a (1 - p) \sqrt{3}/4)^2 \\ \mathbf{d_2 = a \sqrt{3}/2 \sqrt{k^2 + k + 1}}$$

□ Put d_2 ne ovisi od p !

□ Put d_2 uvijek je kraći od D , za svaki $k > 0$ i $p \geq 0$.

□ Put d_2 je
za $p = 0$ jednak putu d_1 ,
za $p > 0$ dulji je od puta d_1 .

Mrav i med na trostranoj prizmi

□ Duljina puta d_3 :

$$d_3^2 = (a \sqrt{3}/2 - a p \sqrt{3}/4)^2$$

$$+ (a p \sqrt{3}/2 + a k \sqrt{3}/2 + a p \sqrt{3}/4)^2$$

$$d_3 = a \sqrt{3}/2 \sqrt{k^2 + 3 k p + 3 p^2 - 3 p + 3}$$

□ d_3 je kraći od očitog puta D kad je:

$$k > (3 p^2 - 3 p + 2) / (2 - 3 p)$$

□ Formula za $p_{\max 3}$ je:

$$p_{\max 3} = 1/6 (\sqrt{9 k^2 + 6 k - 15} - 3 k + 3)$$

Mrav i med na trostranoj prizmi

□ Duljina puta d_4 :

$$d_4^2 = (a \sqrt{3}/2 + a p \sqrt{3}/4)^2$$

$$+ (a p \sqrt{3}/2 + a k \sqrt{3}/2 + a p \sqrt{3}/4)^2$$

$$d_4 = a \sqrt{3}/2 \sqrt{k^2 + 3 k p + 3 p^2 + 3 p + 3}$$

□ d_4 je kraći od očitog puta D kad je:

$$k > (3 p^2 + 3 p + 2) / (2 - 3 p)$$

□ Formula za $p_{\max 4}$ je:

$$p_{\max 4} = 1/6 (\sqrt{9 k^2 + 42 k - 15} - 3 k - 3)$$

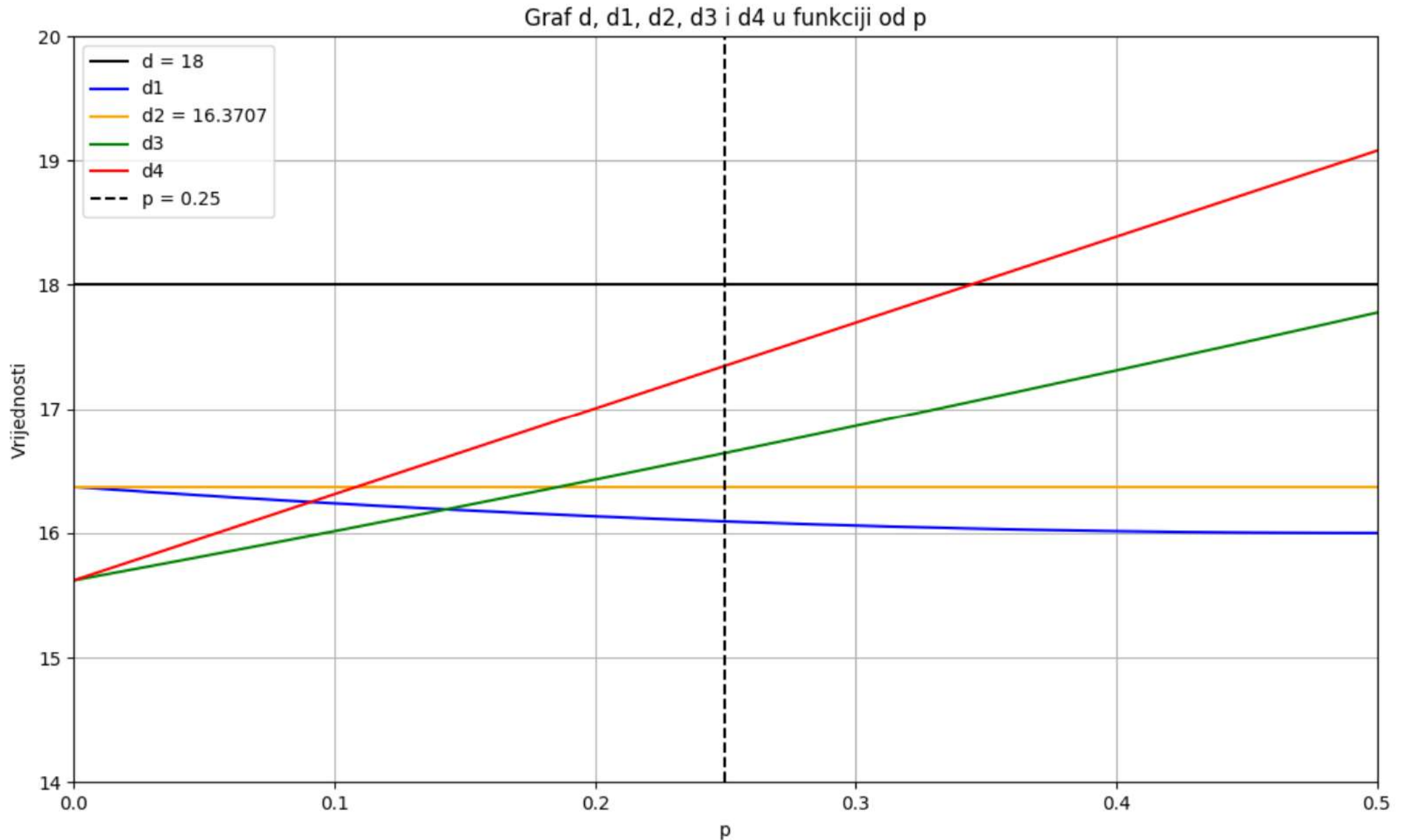
Mrav i med na trostranoj prizmi

- Za koje su p_{eq} putevi jednake duljine?
- Da bi d_1 bio duži od d_3 , vrijedi:
$$p < 1/3 (1 - 2 / k) \text{ tj. } p_{eq1_3} = 1/3 (1 - 2 / k)$$

pa iz toga vrijedi i uvjet: $1 - 2 / k > 0 \Rightarrow k > 2$
- Ekvivalentno vrijedi: $k_{eq1_3} = 2 / (1 - 3 p)$
- Ako $k > 2$ AND $p < 1/3 (1 - 2 / k)$ kraći je d_3 , inače d_1 .
- Za d_1 i d_4 vrijedi:
$$p_{eq1_4} = (k - 2) / (3 k + 6)$$
- Za d_2 i d_3 vrijedi:
$$p_{eq2_3} = 1/6 (\text{sqrt}(9 k^2 - 6 k - 15) - 3 k + 3)$$
- Za d_2 i d_4 vrijedi:
$$p_{eq2_4} = 1/6 (\text{sqrt}(9 k^2 + 30 k - 15) - 3 k - 3)$$
- d_3 je uvijek kraći od d_4 , osim za $p = 0$, kad su jednaki

Mrav i med na trostranoj prizmi

□ d_1 , d_2 , d_3 i d_4 , za bazu duljine 4 i $k = 3,5$



Mrav i med na trostranoj prizmi

□ **Kut** (u odnosu na horizontalu) **pod kojim mrav treba krenuti** prema kapljici meda, za puteve d_1 , d_2 :

$$\tan(\alpha_1) = \frac{(a p \sqrt{3}/4 + a k \sqrt{3}/2 + a (1 - p) \sqrt{3}/4)}{(a (1/2 - p) 3/2)}$$

$$\text{kut1} = \alpha_1 - \pi/3$$

$$\text{kut1} = \arctan(\sqrt{3}/3 (2 k + 1) / (1 - 2 p)) - \pi/3$$

$$\tan(\alpha_2) = \frac{(a p \sqrt{3}/4 + a k \sqrt{3}/2 + a (1 - p) \sqrt{3}/4)}{(a p 3/4 + a (1 - p) 3/4)}$$

$$\text{kut2} = 2/3 \pi - \alpha_2$$

$$\text{kut2} = 2/3 \pi - \arctan(\sqrt{3}/3 (2 k + 1))$$

Mrav i med na trostranoj prizmi

- **Kut** (u odnosu na horizontalu) **pod kojim mrav treba krenuti** prema kapljici meda, za puteve d3, d4:

$$\tan(\text{alfa3}) = \frac{(a \cdot p \cdot \sqrt{3})/2 + a \cdot k \cdot \sqrt{3}/2 + a \cdot p \cdot \sqrt{3}/4}{(a \cdot 3/2 - a \cdot p \cdot 3/4)}$$

$$\text{kut3} = \text{alfa3} - \pi/3$$

$$\text{kut3} = \arctan(\sqrt{3}/3 (2k + 3p) / (2 - p)) - \pi/3$$

$$\tan(\text{alfa4}) = \frac{(a \cdot p \cdot \sqrt{3})/2 + a \cdot k \cdot \sqrt{3}/2 + a \cdot p \cdot \sqrt{3}/4}{(a \cdot 3/2 + a \cdot p \cdot 3/4)}$$

$$\text{kut4} = 2/3 \pi - \text{alfa4}$$

$$\text{kut4} = 2/3 \pi - \arctan(\sqrt{3}/3 (6k + 9p) / (6 + 3p))$$

Mrav i med na trostranoj prizmi

Rekapitulacija formula (za $2 \leq k \leq 5$):

$$D = a \sqrt{3}/2 (k + 1)$$

$$d1 = a \sqrt{3}/2 \sqrt{k^2 + k + 3 p^2 - 3 p + 1}$$

$$d2 = a \sqrt{3}/2 \sqrt{k^2 + k + 1} \text{ (**ne ovisi od } p\text{)**}$$

$$d3 = a \sqrt{3}/2 \sqrt{k^2 + 3 k p + 3 p^2 - 3 p + 3}$$

$$d4 = a \sqrt{3}/2 \sqrt{k^2 + 3 k p + 3 p^2 + 3 p + 3}$$

$p_{\max 1}$ – nema ograničenja, $d1$ je uvijek kraći od D

$p_{\max 2}$ – nema ograničenjane, $d2$ ne ovisi od p

$$p_{\max 3} = 1/6 (\sqrt{9 k^2 + 6 k - 15} - 3 k + 3)$$

$$p_{\max 4} = 1/6 (\sqrt{9 k^2 + 42 k - 15} - 3 k - 3)$$

Mrav i med na trostranoj prizmi

Rekapitulacija formula (za $2 \leq k \leq 5$):

$p_{eq1_2} = 0$, a za $p > 0$ put $d1$ kraći je od $d2$

$p_{eq1_3} = 1/3 (1 - 2 / k)$ (mora biti $k > 2$)

$p_{eq1_4} = (k - 2) / (3 k + 6)$

$p_{eq2_3} = 1/6 (\sqrt{9 k^2 - 6 k - 15}) - 3 k + 3)$

$p_{eq2_4} = 1/6 (\sqrt{9 k^2 + 30 k - 15}) - 3 k - 3)$

$p_{eq3_4} = 0$, a za $p > 0$ put $d1$ kraći je od $d4$

$kut1 = \arctan(\sqrt{3}/3 (2 k + 1) / (1 - 2 p)) - \pi/3$

$kut2 = 2/3 \pi - \arctan(\sqrt{3}/3 (2 k + 1))$

$kut3 = \arctan(\sqrt{3}/3 (2 k + 3 p) / (2 - p)) - \pi/3$

$kut4 = 2/3 \pi - \arctan(\sqrt{3}/3 (6 k + 9 p) / (6 + 3 p))$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

- Sada analiziramo prizmu čija je baza pravilni šesterokut (6-prizma).
- Kod 6-prizme očit put ima duljinu koja je zbroj visine prizme (h) i dvije visine trokuta (v).
- Ako visinu 6-prizme prikažemo kao (v = visina trokuta):

$$h = k \cdot 2 \cdot v$$

gdje je v (a = stranica šesterokuta):

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

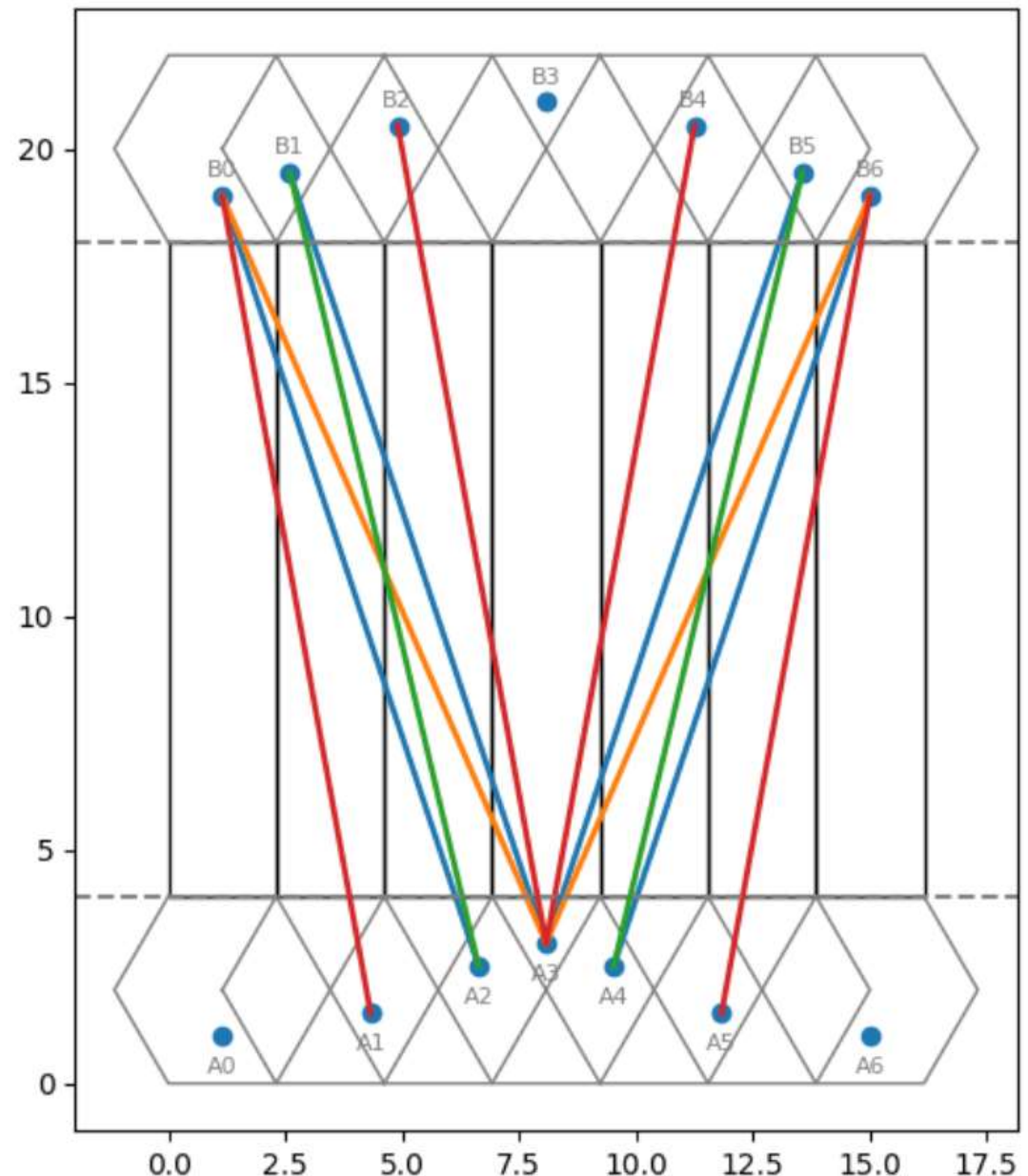
dobijemo sljedeće:

$$D = h + 2 \cdot v = 2 \cdot v \cdot (k + 1)$$

$$D = a \cdot \sqrt{3} \cdot (k + 1)$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

- Četiri kraća puta (odnosno, četiri klase) za postavke:
visina prizme $h = 14$
visina baze $= 2v = 4$
 $p = 0,25$
- Plavi je najkraći, u tekstu **d1**
- Narančasti je dulji, u tekstu **d2**
- Zeleni je još dulji, u tekstu **d3**
- Crveni je najdulji, u tekstu **d4**



Mrav i med na šesterostranoj prizmi

□ Postoje maksimalno (ovisi od p) 4 puta kraća od očitog puta D (za $2 \leq k \leq 5$).

□ Duljina puta d_1 :

$$d_1^2 = (2a + \frac{3}{4}(1 - 2p)a)^2 + (a\sqrt{3}p + a\sqrt{3}k + a\sqrt{3}(p/2 + 1/4))^2$$

$$d_1 = a\sqrt{3} \sqrt{k^2 + \frac{1}{2}k + 3kp + 3p^2 - 2p + \frac{31}{12}}$$

□ d_1 je kraći od očitog puta D kad je:

$$k > (2p^2 - \frac{4}{3}p + \frac{19}{18}) / (1 - 2p)$$

□ Formula za $p_{\max 1}$ je:

$$p_{\max 1} = \frac{1}{6} (\sqrt{9k^2 + 6k - 15} - 3k + 2)$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

□ Duljina puta d_2 :

$$d_2^2 = (3a)^2 + (2\sqrt{3}pa + k\sqrt{3}a)^2$$

$$d_2 = a\sqrt{3}\sqrt{k^2 + 4kp + 4p^2 + 3}$$

□ d_2 je kraći od očitog puta D kad je:

$$k > (2p^2 + 1) / (1 - 2p)$$

□ Formula za $p_{\max 2}$ je:

$$p_{\max 2} = 1/2 (\sqrt{k^2 + 2k - 2} - k)$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

□ Duljina puta d_3 :

$$d_3^2 = (a + 2 \frac{3}{4} (1 - 2p) a)^2$$

$$+ (2 \sqrt{3}) (p / 2 + 1/4) a + k \sqrt{3} a)^2$$

$$d_3 = a \sqrt{3} \sqrt{k^2 + k + 2kp + 4p^2 - 4p + 7/3}$$

□ d_3 je kraći od očitog puta D kad je:

$$k > \frac{4}{3} (3p^2 - 3p + 1) / (1 - 2p)$$

□ Formula za $p_{\max 3}$ je:

$$p_{\max 3} = \frac{1}{12} (\sqrt{9k^2 - 12} - 3k + 6)$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

□ Duljina puta d4:

$$d4^2 = (a + \frac{3}{4} (1 - 2p) a)^2$$

$$+ (p \sqrt{3} a + k \sqrt{3} a + \sqrt{3}/2 a + \sqrt{3}/4 (1 - 2p) a)^2$$

$$d4 = a \sqrt{3} \sqrt{k^2 + \frac{3}{2} k + k p + p^2 - p + \frac{19}{12}}$$

□ d4 je kraći od očitog puta D kad je:

$$k > (2 p^2 - 2 p + \frac{7}{6}) / (1 - 2 p)$$

□ Formula za p_max4 je:

$$p_{\max 4} = \frac{1}{6} (\sqrt{9 k^2 - 12} - 3 k + 3)$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

□ Za koje su p_{eq} putevi jednake duljine?

$$p_{eq1_2} = 1/6 (\sqrt{9k^2 + 54k + 21}) - 3k - 6)$$

$$p_{eq1_3} = 1/2 (-\sqrt{k^2 + 2k + 5}) + k + 2)$$

$$p_{eq1_4} = 1/4 (\sqrt{4k^2 + 4k - 7}) - 2k + 1)$$

$$p_{eq2_3} = (3k - 2) / (6k + 12)$$

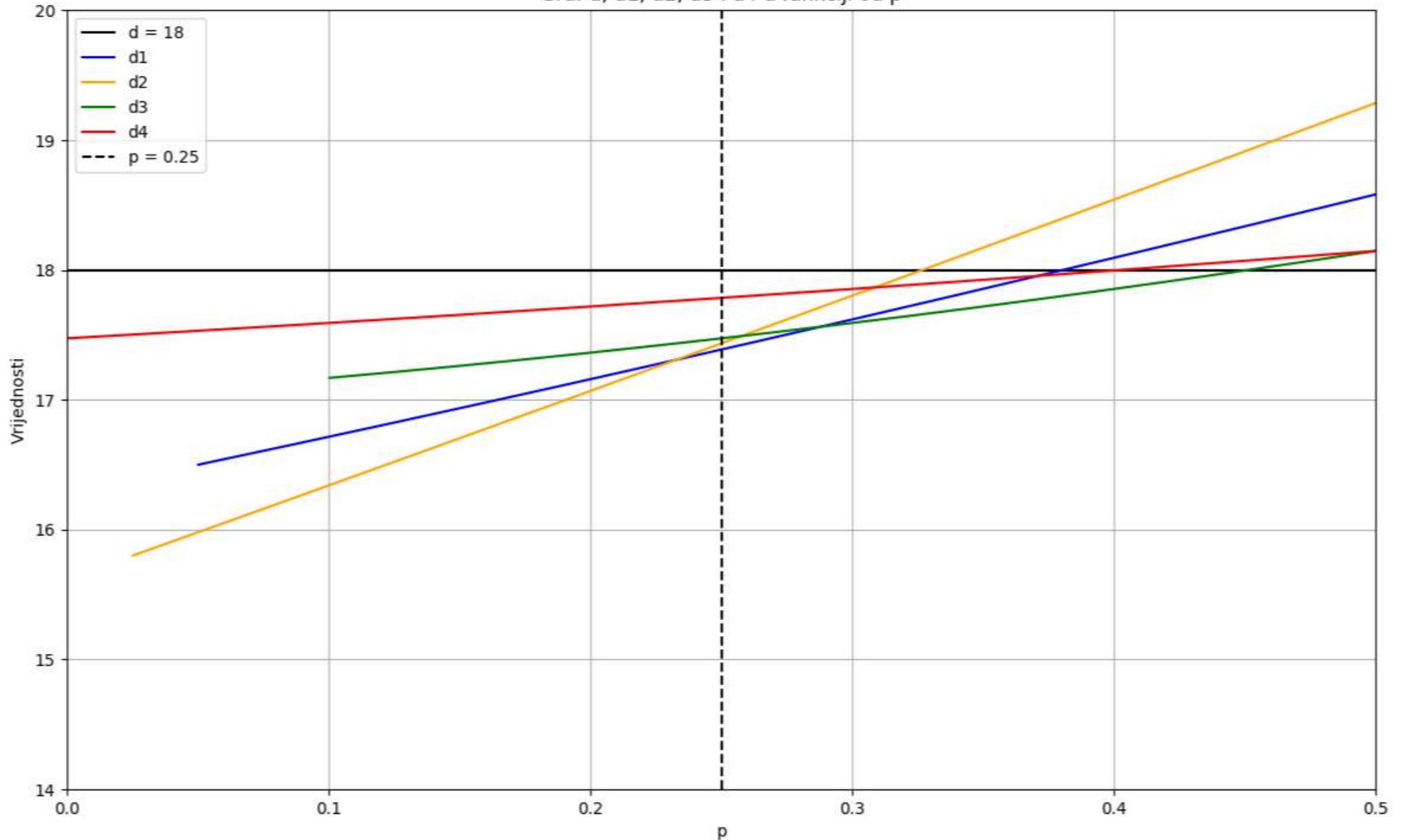
$$p_{eq2_4} = 1/6 (\sqrt{9k^2 + 24k - 16}) - 3k - 1)$$

$$p_{eq3_4} = 1/2 - k / 3 \text{ ako je } k < 3/2, \text{ a inače je } 1/2$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

□ d_1 , d_2 , d_3 i d_4 , za bazu duljine 4 i $k = 3,5$

Graf d , d_1 , d_2 , d_3 i d_4 u funkciji od p



Mrav i med na šesterostranoj prizmi

- **Kut** (u odnosu na horizontalu) **pod kojim mrav treba krenuti** prema kapljici meda, za puteve d1, d2:

$$\tan(\text{kut1}) = \frac{(a \sqrt{3} p + a \sqrt{3} k + a \sqrt{3} (p / 2 + 1/4))}{(2 a + 3/4 (1 - 2 p) a)}$$

$$\text{kut1} = \arctan(\sqrt{3} (4 k + 6 p + 1) / (11 - 6 p))$$

$$\tan(\text{kut2}) = \frac{(2 \sqrt{3} p a + k \sqrt{3} a)}{(3 a)}$$

$$\text{kut2} = \arctan(\sqrt{3}/3 (k + 2 p))$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

- **Kut** (u odnosu na horizontalu) **pod kojim mrav treba krenuti** prema kapljici meda, za puteve d3, d4:

$$\tan(\text{alfa3}) = \frac{(2 \sqrt{3}) (p / 2 + 1/4) a + k \sqrt{3} a}{(a + 2 \frac{3}{4} (1 - 2 p) a)}$$

$$\text{kut3} = \text{alfa3} - \pi/3$$

$$\text{kut3} = \arctan(\sqrt{3} (2 k + 2 p + 1) / (5 - 6 p)) - \pi/3$$

$$\tan(\text{kut4}) = \frac{k \sqrt{3} a + \sqrt{3}/2 a + \sqrt{3}/4 (1 - 2 p) a}{(a + 3/4 (1 - 2 p) a) / (p \sqrt{3} a)}$$

$$\text{kut4} = \arctan(\sqrt{3} (4 k + 2 p + 3) / (7 - 6 p))$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

□ **Rekapitulacija formula** (za $2 \leq k \leq 5$):

$$D = a \sqrt{3} (k + 1)$$

$$d1 = a \sqrt{3} \sqrt{k^2 + \frac{1}{2} k + 3 k p + 3 p^2 - 2 p + \frac{31}{12}}$$

$$d2 = a \sqrt{3} \sqrt{k^2 + 4 k p + 4 p^2 + 3}$$

$$d3 = a \sqrt{3} \sqrt{k^2 + k + 2 k p + 4 p^2 - 4 p + \frac{7}{3}}$$

$$d4 = a \sqrt{3} \sqrt{k^2 + \frac{3}{2} k + k p + p^2 - p + \frac{19}{12}}$$

$$p_{\max 1} = \frac{1}{6} (\sqrt{9 k^2 + 6 k - 15} - 3 k + 2)$$

$$p_{\max 2} = \frac{1}{2} (\sqrt{k^2 + 2 k - 2} - k)$$

$$p_{\max 3} = \frac{1}{12} (\sqrt{9 k^2 - 12} - 3 k + 6)$$

$$p_{\max 4} = \frac{1}{6} (\sqrt{9 k^2 - 12} - 3 k + 3)$$

Mrav i med na šesterostranoj prizmi

□ Rekapitulacija formula (za $2 \leq k \leq 5$):

$$p_{eq1_2} = 1/6 (\sqrt{9k^2 + 54k + 21} - 3k - 6)$$

$$p_{eq1_3} = 1/2 (-\sqrt{k^2 + 2k + 5} + k + 2)$$

$$p_{eq1_4} = 1/4 (\sqrt{4k^2 + 4k - 7} - 2k + 1)$$

$$p_{eq2_3} = (3k - 2) / (6k + 12)$$

$$p_{eq2_4} = 1/6 (\sqrt{9k^2 + 24k - 16} - 3k - 1)$$

$$p_{eq3_4} = 1/2 - k / 3 \text{ ako je } k < 3/2, \text{ a inače je } 1/2$$

$$kut1 = \arctan(\sqrt{3} (4k + 6p + 1) / (11 - 6p))$$

$$kut2 = \arctan(\sqrt{3}/3 (k + 2p))$$

$$kut3 = \arctan(\sqrt{3} (2k + 2p + 1) / (5 - 6p)) - \pi/3$$

$$kut4 = \arctan(\sqrt{3} (4k + 2p + 3) / (7 - 6p))$$

Mrav i med na peterostranoj prizmi

- Sada analiziramo prizmu čija je baza pravilni peterokut (5-prizma).
- Kod 5-prizme očit put ima duljinu koja je zbroj visine prizme (h) i visine baze (b):
$$D = h + b = b k + b = b (k + 1)$$
- Visina baze b je zbroj visine trokuta (v) i krakova trokuta (s):

$$b = v + s$$

$$b = a/2 \tan(3/10 \pi) + a/2 / \cos(3/10 \pi)$$

$$b = a/2 (\sin(3/10 \pi) + 1) / \cos(3/10 \pi)$$

- Pa je:

$$\mathbf{D = a/2 (\sin(3/10 \pi) + 1) / \cos(3/10 \pi) (k + 1)}$$

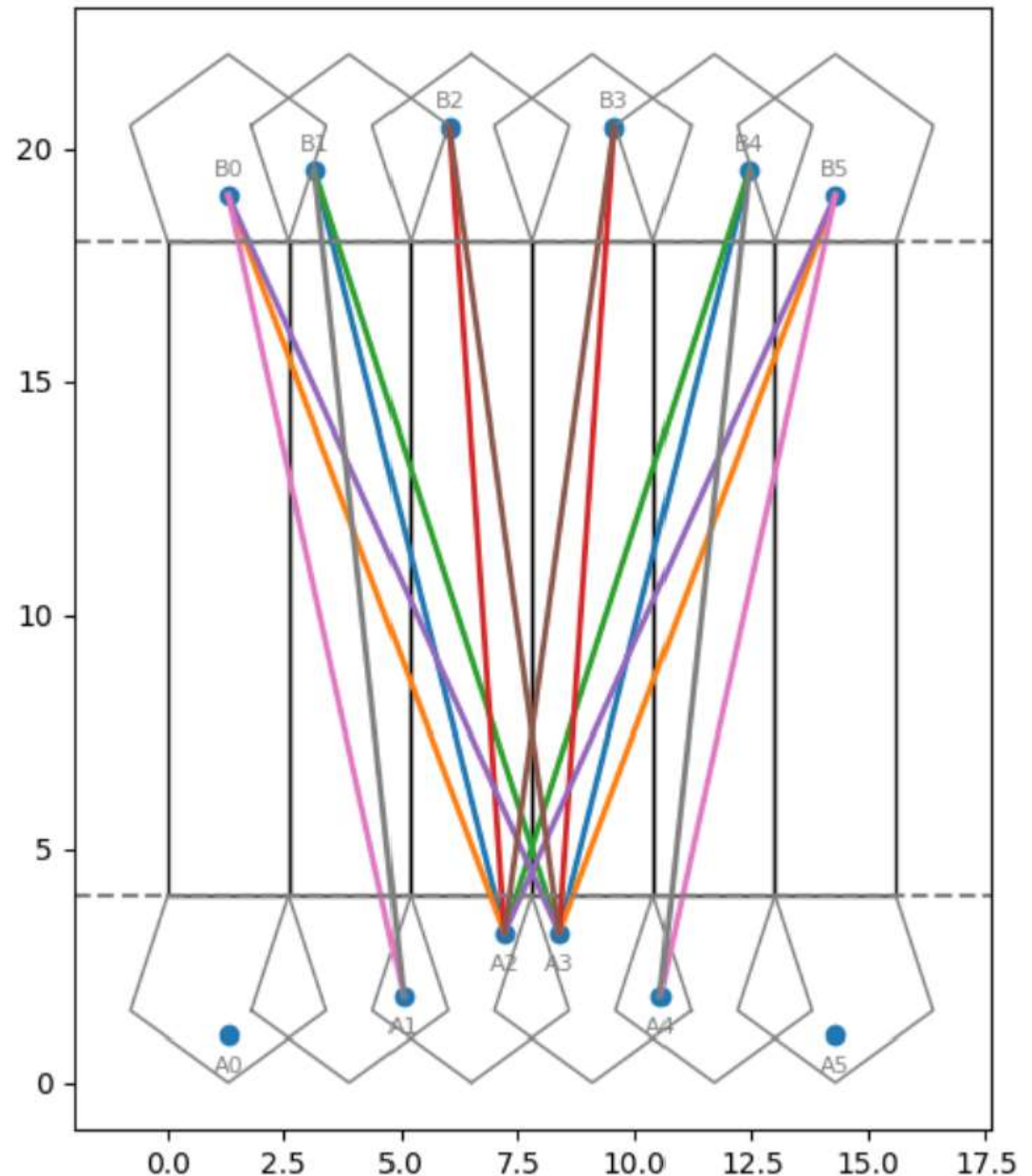
napomena - može se koristiti i ove ekvivalentne izraze:

$$\sin(3/10 \pi) = (1 + \sqrt{5})/4$$

$$\cos(3/10 \pi) = \sqrt{(5 - \sqrt{5})}/8$$

Mrav i med na peterostranoj prizmi

- **Osam kraćih puteva** (odnosno, osam klasa) za postavke:
visina prizme $h = 14$
visina baze $b = 4$
 $p = 0,25$
- Plavi je najkraći, pa narančasti, zeleni, crveni, ljubičasti, smeđi, rozi, sivi
- Kao kod trokutaste prizme, **postoji put koji ne ovisi o udaljenosti točaka A i B od ruba** – ovdje je to smeđi.



Mrav i med na peterostranoj prizmi

- Postoji maksimalno 8 puteva kraćih od očitog puta D (za $2 \leq k \leq 5$), ali prikazat ćemo formule samo za d1 (najkraći put za dane parametre) i d6 (put neovisan od p).

$$d1 = b \sqrt{\left(\frac{(10 - 3 \sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2 \sqrt{5}}} - \frac{(3 + \sqrt{5})}{8} \sqrt{10 - 2 \sqrt{5}} \right) p^2 + \left(k + \frac{(\sqrt{5} - 1)}{4} + \frac{(\sqrt{5})}{2} \right) p^2}$$

$$d6 = b \sqrt{(\cos(3/10 \pi))^2 + (k + \sin(3/10 \pi))^2}$$

$$d6 = b \sqrt{k^2 + (1 + \sqrt{5})/2 k + 1}$$

- Kut (u odnosu na horizontalu), za puteve d1, d6:

$$kut1 = \arctan\left(\frac{\left(k + \frac{(\sqrt{5} - 1)}{4} + \frac{(\sqrt{5})}{2} \right) p}{\left(\frac{(10 - 3 \sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2 \sqrt{5}}} - \frac{(3 + \sqrt{5})}{8} \sqrt{10 - 2 \sqrt{5}} \right) p} \right) - \pi/5$$

$$kut6 = 4/5 \pi - \arctan((k + \sin(3/10 \pi)) / \cos(3/10 \pi))$$

Mrav i med na valjku

- Polazna ideja je da se valjak prikaže u dvije dimenzije (dva kruga i plašt), pa se po plaštu kotrlja gornji krug (med), a povezano s gornjim krugom kotrlja se i donji krug (mrav).
- **Kod minimalnog puta, ove 4 točke moraju biti na pravcu:**
 - med i mrav (zamišljeni kao točke)
 - dirališta gornjeg i donjeg kruga s plaštom.
- Ako je $r = 2$, $h = 10$ i mrav se nalazi na 1 od gornjeg ruba, da bi barem tri točke (oba dirališta i mrav ili med) bile na istom pravcu, kut (x_1) kotrljanja donjeg kruga ovisi o kutu (x) kotrljanja gornjeg kruga ovako:
 $x_1 = x - 5 \sin(x) / (\cos(x) + 2)$
- Da bi sve 4 točke bile na pravcu, dodatno mora biti:
 $x_1 = \pi - x$
- pa se x kod može izračunati numeričkom metodom iz:
 $2x - 5 \sin(x) / (\cos(x) + 2) - \pi = 0$

Mrav i med na valjku

- Očiti put ima duljinu koja je zbroj visine prizme i 2 polumjera:

$$D = h + 2r = 10 + 2 \cdot 2 = 14$$

- Ako je $r = 2$, $h = 10$ i mrav se nalazi na 1 od gornjeg ruba, formula za najmanju udaljenost između mrava i meda je (kut kotrljanja gornjeg kruga, x , prethodno je izračunat):

$$d = 2 \sqrt{(\sin(x) + 5 \sin(x) / (\cos(x) + 2))^2 + (\cos(x) + 7)^2}$$

- Minimalna udaljenost je $\approx 13,32$ za kut kotrljanja gornjeg kruga od $\approx 2,64$ radijana.

Mrav i med na valjku

- I formule za valjak mogu se generalizirati.
- Može se uzeti bilo koji polumjer (r), a visina valjka (h) prikazati kao k visina baze (promjer kruga, $2r$):
 $h = k \cdot 2r$
- Također, početni položaj mrava može biti na segmentu **$p \cdot 2r$** , tj. od ruba ($p = 0$) do središta ($p = 0,5$).
- Naravno, iz središta ne postoji kosi put koji je kraći od očitog, jer su svi putevi iz središta očiti putevi.

Mrav i med na valjku

- Očiti put ima duljinu koja je zbroj visine prizme i 2 polumjera:

$$D = h + 2r = k 2r + 2r$$

$$D = 2r(k + 1)$$

- Kao i kod prizme, najkraći kosi put je onaj koji polazi od ruba (tj. kada je $p = 0$):

$$d_0 = r \sqrt{\pi^2 + 4k^2}$$

- Kada je $p = 0$, uvjet za postojanje kraćeg puta (od očitog) dobije se iz izraza $d_0 < D$:

$$k > \pi^2 / 8 - 1/2 \quad (\approx 0,73)$$

- Kada je $p = 0$, **optimalni k** dobije se (kao i kod prizmi) traženjem **minimuma za d_0 / D** :

$$k_{\text{opt}} = \pi^2 / 4 \quad (\approx 2,47)$$

a tada je $d_0 / D \approx 0,84$

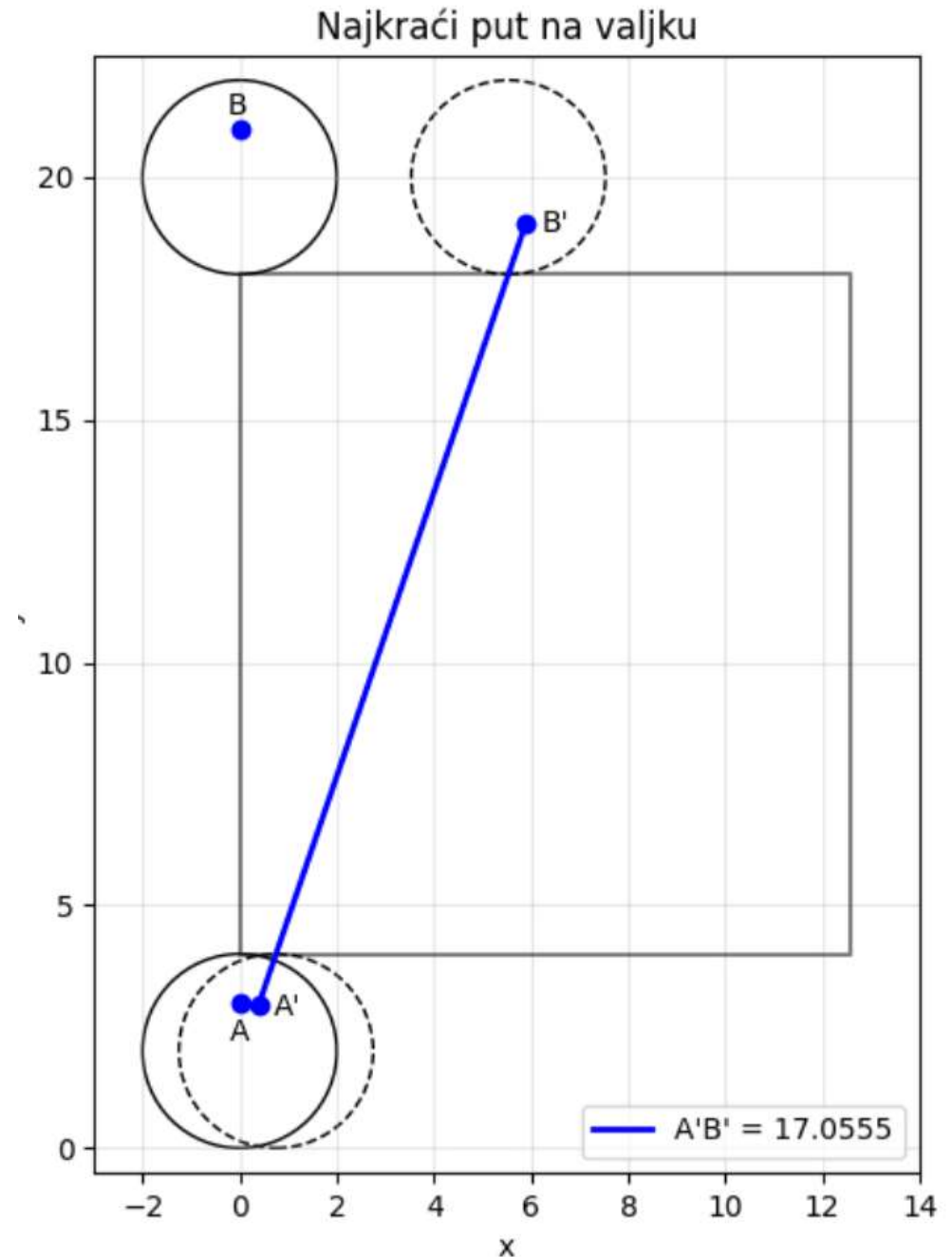
Mrav i med na valjku

- Da bi barem tri točke (oba dirališta i mrav ili med) bile na istom pravcu, kut (x_1) kotrljanja donjeg kruga ovisi o kutu (x) kotrljanja gornjeg kruga u općenitom slučaju ovako:
$$x_1 = x - 2k \sin(x) / (\cos(x) + 1 / (1 - 2p))$$
- Kod minimalne udaljenosti (tada su sve 4 točke na pravcu) je:
$$x_1 = \pi - x$$
- pa se x kod najkraćeg puta može izračunati numeričkom metodom (npr. metodom tangente) iz:
$$2x - 2k \sin(x) / (\cos(x) + 1 / (1 - 2p)) - \pi = 0$$
- Za općenitu vrijednost r , gdje je $k > (\pi^2/8 - 1/2)$ i $0 < p < 1/2$, formula za najmanju udaljenost između mrava i meda je
$$d = 2r \sqrt{((1 - 2p) \sin(x) + k \sin(x) / (\cos(x) + 1 / (1 - 2p)))^2 + ((1 - 2p) \cos(x) + k + 1)^2}$$

Mrav i med na valjku

□ Za postavke:
visina valjka $h = 14$
visina baze $2r = 4$
(tj. $k = 3,5$)
 $p = 0,25$

□ Dobije se:
 $x \approx 2,77$ rad
 $x_1 \approx 0,37$ rad
 $d \approx 17,06$



Mrav i med na valjku

- Dolje su formule za kut (u odnosu na horizontalu) pod kojim mrav treba krenuti prema kapljici meda.
- Za $p = 0$ vrijedi:
 $\tan(\alpha) = k \cdot 2r / (r \pi) = 2k / \pi$
 $\text{kut} = \pi/2 - \alpha$
 $\text{kut} = \pi/2 - \arctan(2k / \pi)$
- Za $p > 0$ vrijedi
(x_1 i x su kut rotacije meda i mrava kod minimalnog puta):
 $\text{kut} = \arctan((\cos(x_1) - 1 + 2p) / \sin(x_1))$
pa (budući da kod minimalnog puta vrijedi: $x_1 = \pi - x$):
 $\text{kut} = \arctan((\cos(\pi - x) - 1 + 2p) / \sin(\pi - x))$
 $\text{kut} = \arctan((- \cos(x) - 1 + 2p) / \sin(x))$

Mrav i med na valjku

□ Numeričkom analizom može se vidjeti da i kod valjka postoji **minimalni k** i za slučaj kada je $p > 0$.

□ Tražimo da vrijedi $d < D$, tj.:

$2 r \sqrt{$

$$\begin{aligned} & ((1 - 2 p) \sin(x) + k \sin(x) / (\cos(x) + 1 / (1 - 2 p)))^2 \\ & + ((1 - 2 p) \cos(x) + k + 1)^2 \\ &) \\ & < (2 r (k + 1)) \end{aligned}$$

□ Iz

$$2 x - 2 k \sin(x) / (\cos(x) + 1 / (1 - 2 p)) - \pi = 0$$

dobijemo

$$k = (x - \pi/2) (\cos(x) + 1 / (1 - 2 p)) / \sin(x)$$

i to uvrstimo u gornju nejednadžbu.

Mrav i med na valjku

□ Dakle, tražimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} & \sqrt{((1 - 2p) \sin(x) + (x - \pi/2))^2 + ((1 - 2p) \cos(x) + (x - \pi/2) (\cos(x) + 1 / (1 - 2p)) / \sin(x) + 1)^2} \\ & < ((x - \pi/2) (\cos(x) + 1 / (1 - 2p)) / \sin(x) + 1) \end{aligned}$$

- Za $p = 0,01$, vidi se je granica za $x \approx 3,10$, minimalni $k \approx 0,75$.
- Za $p = 0,25$, $x \approx 2,12$, $k \approx 0,95$.
- Za $p = 0,40$, $x \approx 1,77$, $k \approx 0,99$.
- **Općenito, kako se povećava p ($0 < p < 0,5$), povećava se minimalni k .**

Mrav i med na valjku

□ Slično prethodnom, numeričkom analizom može se vidjeti da **postoji optimalni k i za slučaj kada je $p > 0$.**

□ Tražimo **minimum od d / D** , tj. minimum od:

$2 r \sqrt{$

$$((1 - 2 p) \sin(x) + k \sin(x) / (\cos(x) + 1 / (1 - 2 p)))^2$$

$$+ ((1 - 2 p) \cos(x) + k + 1)^2$$

$)$

$$/ (2 r (k + 1))$$

□ Iz

$$2 x - 2 k \sin(x) / (\cos(x) + 1 / (1 - 2 p)) - \pi = 0$$

dobijemo

$$k = (x - \pi/2) (\cos(x) + 1 / (1 - 2 p)) / \sin(x)$$

i to uvrstimo u gornju formulu (za minimum od d / D).

Mrav i med na valjku

□ Dakle, tražimo minimum od:

$\sqrt{$

$$((1 - 2p) \sin(x) + (x - \pi/2))^2$$

+

$$((1 - 2p) \cos(x) + (x - \pi/2)$$

$$(\cos(x) + 1 / (1 - 2p)) / \sin(x) + 1)^2$$

)

$$/ ((x - \pi/2) (\cos(x) + 1 / (1 - 2p)) / \sin(x) + 1)$$

□ Za $p = 0,01$, vidi se minimum za $x \approx 3,01$,
pa je optimalni $k \approx 2,80$, a odnos $d / D \approx 0,89$.

□ Za $p = 0,25$, $x \approx 2,77$, $k \approx 3,56$, $d / D \approx 0,95$.

□ Za $p = 0,40$, $x \approx 2,44$, $k \approx 5,65$, $d / D \approx 0,99$.

□ **Općenito, kako se povećava p ($0 < p < 0,5$),
povećava se optimalni k , a d / D približava se jedinici.**

Ukratko – valjak ima samo jedan kraći put, a

- **Ove pravilne prizme imaju maksimalno**
(ovisno o parametrima koje smo označili sa k i p)
ovaj broj klasa kraćih puteva
(puteva koji imaju istu duljinu, pa ih brojimo kao jedan):
- **Trostrana** prizma ima do 4 kraća puta za $2 \leq k \leq 5$.
Duljina jednog od njih ne ovisi o parametru p .
- **Četverostrana** prizma ima do 2 kraća puta za $2 \leq k \leq 5$.
- **Peterostrana prizma** ima do 8 kraćih puteva za $2 \leq k \leq 5$.
Duljina jednog od njih ne ovisi o parametru p .
- **Šesterostrana** prizma do 4 kraća puta za $2 \leq k \leq 5$.

Neka (moja) otvorena pitanja i hipoteze

- Postoji li beskonačan broj različitih pravilnih prizmi koje imaju kraći put (tj. klasu puteva iste duljine) koji je kraći od "očitog puta"? DA.
- Ako takvih prizmi ima beskonačno, je li i broj kraćih puteva neograničen? DA.
- Da li svaka "neparna" prizma (prizma s neparnim brojem pravokutnika koji čine plašt) ima kraći put čija duljina ne ovisi o udaljenosti mrava (i meda) od ruba? DA, ima točno jedan, a "parne" prizme nemaju takve puteve.
- Za valjak nisu nađene "potpune algebarske formule". Kut (za rotaciju kruga za najkraći put) nalazi se numeričkom metodom, a onda se uvrštava u drugu formulu. Pitanje je bi li se moglo doći do "potpune algebarske formule" (npr. tako da se analizira 12-strana prizma, 24-strana prizma..., a onda se pokuša naći formula prelaskom na limes, kada broj stranica teži u beskonačnost)? NE.

FIPU - Fakultet informatike u Puli
visina = 14, visina baze = 4 (tj. $k = 3,5$), $p = 0,25$;
napomena: 3 i 6-strana prizma imaju
još i četvrti kraći put, koji nisu prikazani

